знака с инфинитезимальной образующей коприсоединенного представления, определенной вектором $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$: $\widehat{\mathbf{v}}_H = -\mathrm{ad}^*\mathbf{v}$. Таким образом, соответствующие однопараметрические группы удовлетворяют условию

$$\exp(t\widehat{\mathbf{v}}_H) = \mathrm{Ad}^*[\exp(-t\,\mathbf{v})].$$

Предложение 6.16 и обычные соображения связности показывают, что $\mathrm{Ad}^* g$ является пуассоновым отображением для каждого $g \in G$.

Кроме того, подпространство $\widehat{\mathscr{H}}|_\omega$, $\omega \in \mathfrak{g}^*$, порождено гамильтоновыми векторными полями $\widehat{\mathbf{v}}_H$, соответствующими всем таким линейным функциям $H = H_\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$; следовательно, $\mathscr{H}|_\omega = \mathrm{ad}^*\mathfrak{g}|_\omega$ совпадает с пространством, порожденным соответствующими инфинитезимальными образующими $\mathrm{ad}^*\mathbf{v}|_\omega$. Так как $\mathrm{ad}^*\mathfrak{g}|_\omega$ в точности является касательным пространством к орбите коприсоединенного представления группы G, проходящей через точку ω, то ввиду связности этой орбиты мы немедленно заключаем, что она совпадает с соответствующим интегральным подмногообразием системы $\mathscr{H}$. □

Следствие 6.26. *Орбиты коприсоединенного представления группы G являются четномерными подмногообразиями в $\mathfrak{g}^*$.*

Пример 6.27. Для группы вращений $\mathrm{SO}(3)$ орбитами коприсоединенного представления являются сферы $S^2_\rho \subset \mathfrak{so}(3)^*$, определенные в примере 6.20. Действительно, согласно примеру 3.9, присоединенное действие матрицы вращения $R \in \mathrm{SO}(3)$ на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ совпадает с самим вращением R в стандартном базисе: $\mathrm{Ad}\, R(\mathbf{v}) = R\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{so}(3)$. Таким образом, представляющая матрица коприсоединенного действия Ad^*R элемента R на $\mathfrak{so}(3)^*$ в соответствующем двойственном базисе на $\mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$ имеет вид $\mathrm{Ad}^*R = (R^{-1})^T = R$, и поэтому коприсоединенное представление группы $\mathrm{SO}(3)$ совпадает с ее обычным действием на $\mathbb{R}^3$ при указанных отождествлениях. В частности, орбиты коприсоединенного действия в точности совпадают со сферами S^2_ρ, $\rho \geqslant 0$.

6.3. СИММЕТРИИ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Теорема Нётер описывает связь между однопараметрическими группами вариационных симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений в лагранжевой форме, т. е. уравнений Эйлера — Лагранжа для некоторой вариационной задачи, и законами сохранения, или первыми интегралами. Кроме того, знание такого первого интеграла позволяет нам понизить порядок системы на две единицы в случае однопараметрической группы симметрий; поэтому для полного интегрирования в квадратурах нам достаточно найти вдвое меньшее, чем порядок системы, число симметрий. Все эти утверждения переносятся на гамильтонову ситуацию и на самом деле предстают в гораздо более естественном геометрическом обрамлении, чем наши первоначальные результаты в лагранжевом случае. В этом параграфе мы обсуждаем общую теорию симметрий и редукций для конечномерных гамильтоновых систем.

Первые интегралы

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в гамильтоновой форме

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\nabla H(x, t), \tag{6.25}$$

где $H(x, t)$ — гамильтониан, а $J(x)$ — структурная матрица, задающая скобку Пуассона. В этом случае первые интегралы легко описываются с помощью скобки Пуассона.

Предложение 6.28. *Функция $P(x, t)$ является первым интегралом гамильтоновой системы* (6.25), *если и только если*

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} = 0 \tag{6.26}$$

для всех x, t. В частности, не зависящая от времени функция $P(x)$ является первым интегралом в том и только в том случае, если $\{P, H\} = 0$ всюду.

Доказательство. Пусть $\widehat{\mathbf{v}}_H$ — гамильтоново векторное поле, задающее уравнение (6.25). Тогда ввиду (1.17) для любого решения $x(t)$ уравнений Гамильтона

$$\frac{d}{dt}\{P(x(t), t)\} = \frac{\partial P}{\partial t}(x(t), t) + \widehat{\mathbf{v}}_H(P)(x(t), t).$$

Таким образом, $dP/dt = 0$ вдоль решений в том и только в том случае, если равенство (6.26) выполняется всюду. □

Вид уравнения (6.26) позволяет сразу выписать некоторые первые интегралы.

Следствие 6.29. *Если гамильтониан $H(x)$ гамильтоновой системы $x_t = J\nabla H$* не зависит от времени, *то он сам автоматически является первым интегралом.*

Следствие 6.30. *Любая отмеченная относительно скобки Пуассона, заданной матрицей J, функция $C(x)$ является первым интегралом гамильтоновой системы $x_t = J\nabla H$.*

Первые интегралы, задаваемые отмеченными функциями, проистекают из вырожденности самой скобки Пуассона и не имеют отношения к внутренним свойствам симметрии конкретной исследуемой гамильтоновой системы. Если скобка Пуассона симплектична, то отмеченными являются только константы и следствие 6.30 не дает никакой новой информации. Общие поверхности уровня отмеченных функций для пуассоновой структуры постоянного ранга являются слоями симплектического слоения; поэтому следствие 6.30 просто повторяет теорему 6.21 о том, что любое решение целиком лежит в одном симплектическом слое.

Гамильтоновы группы симметрий

Первые интегралы систем уравнений Эйлера — Лагранжа определяются группами вариационных симметрий; для гамильтоновых систем ту же роль играют однопараметрические *гамильтоновы группы симметрий*, инфинитезимальными образующими которых (в эволюционной форме) являются гамильтоновы векторные поля. Прежде всего легко показать, что всякий первый интеграл приводит к такой группе симметрий.

Предложение 6.31. *Пусть $P(x, t)$ — первый интеграл гамильтоновой системы. Тогда гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_P$ с гамильтонианом P порождает однопараметрическую группу симметрий этой системы.*

Доказательство. Заметим сначала, что, так как структурная матрица $J(x)$ не зависит от t, гамильтоново векторное поле с гамильтонианом $\partial P/\partial t$ есть $\partial\hat{\mathbf{v}}_P/\partial t$ — производная по t поля с гамильтонианом P. Таким образом, гамильтоново векторное поле, построенное по сумме $\partial P/\partial t + \{P, H\}$, входящей в равенство (6.26), с учетом (6.8) имеет вид

$$\partial\hat{\mathbf{v}}_P/\partial t + [\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_P].$$

Если P — первый интеграл системы, это векторное поле обращается в нуль, а это и есть условие (5.26) того, что $\widehat{\mathbf{v}}_P$ порождает группу симметрий. □

В частности, если функция $H(x)$ не зависит от времени, связанная с ней группа симметрий порождена полем $\widehat{\mathbf{v}}_H$ и совпадает с группой сдвигов по времени, порожденной образующей ∂_t, что отражает автономность гамильтоновой системы. Симметрия, отвечающая отмеченной функции $C(x)$, тривиальна: $\widehat{\mathbf{v}}_C \equiv 0$.

Пример 6.32. Рассмотрим уравнения гармонического осциллятора $p_t = -q$, $q_t = p$, образующие гамильтонову систему на плоскости $M = \mathbb{R}^2$ с канонической скобкой Пуассона. Гамильтониан $H(q, p) = (1/2)(p^2 + q^2)$, таким образом, является первым интегралом. Это отражает тот факт, что движение происходит по окружностям $p^2 + q^2 = \mathrm{const}$.

Не всякая гамильтонова группа симметрий непосредственно соответствует первому интегралу. Например, векторное поле $\mathbf{w} = -(p^2 + q^2)^{-1}(p\partial_p + q\partial_q)$ на многообразии $\tilde{M} = M \setminus \{(p, 0)\colon p \leqslant 0\}$ порождает группу симметрий. Более того, поле $\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{v}}_{\tilde{P}}$ гамильтоново с гамильтонианом $\tilde{P}(p, q) = \operatorname{arctg}(q/p)$. Но $\tilde{P}$ *не* является первым интегралом; на самом деле для решения $(p(t), q(t))$ системы $\tilde{P}(p(t), q(t)) = t + \theta_0$ — линейная функция от t.

В этом и в более общем случае проблема состоит в том, что между гамильтоновыми векторными полями и соответствующими им гамильтонианами нет взаимно однозначного соответствия. Например, функция $P(p, q, t) = \operatorname{arctg}(q/p) - t$, которая *является* первым интегралом для осциллятора, имеет то же гамильтоново векторное поле $\widehat{\mathbf{v}}_P = \mathbf{w} = \widehat{\mathbf{v}}_{\tilde{P}}$ что и $\tilde{P}$. Более общо, от прибавления к данной функции P произвольной *зависящей от времени отмеченной функции* $C(x, t)$ (т. е. при каждом фиксированном значении t функция C является отмеченной) ее гамильтоново векторное поле не меняется. Теперь, когда мы поняли возможность модификации функции, задающей гамильтонову группу симметрий, мы готовы доказать предложение, обратное предыдущему. В этом и состоит гамильтонов вариант теоремы Нётер.

Теорема 6.33. *Векторное поле* $\mathbf{w}$ *порождает гамильтонову группу симметрий гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений тогда и только тогда, когда существует такой первый интеграл* $P(x, t)$, *что* $\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{v}}_P$ — *соответствующее гамильтоново векторное поле. Вторая функция* $\tilde{P}(x, t)$ *опреде-*

ляет ту же самую гамильтонову симметрию в том и только в том случае, когда $\tilde{P} = P + C$ для некоторой зависящей от времени отмеченной функции $C(x, t)$.

Доказательство. Второе утверждение непосредственно следует из определения 6.3 отмеченной функции, примененного к разности $P - \tilde{P}$. Чтобы доказать первую часть, положим $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}}_{\tilde{P}}$ для некоторой функции $\tilde{P}(x, t)$. Из условия симметрии (5.26) следует, что гамильтоново векторное поле, соответствующее функции $\partial\tilde{P}/\partial t + \{\tilde{P}, H\}$, всюду обращается в нуль, и поэтому данная функция должна быть зависящей от времени отмеченной функцией $\tilde{C}(x, t)$:

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \frac{\partial\tilde{P}}{\partial t} + \{\tilde{P}, H\} = \tilde{C}.$$

Положим $C(x, t) = \int_0^t \tilde{C}(x, \tau)\, d\tau$; функция C тоже является отмеченной. Кроме того, вдоль решения $x(t)$ гамильтоиовой системы

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \{C, H\} = \tilde{C}.$$

Легко видеть теперь, что подправленная функция $P = \tilde{P} - C$ имеет то же гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_P = \mathbf{w}$ и задает первый интеграл: вдоль решений $dP/dt = 0$. □

В частности, если скобка Пуассона симплектична, то единственными зависящими от времени отмеченными функциями являются функции $C(t)$, зависящие только от t. В этом частном случае теорема 6.33 утверждает, что гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_{\tilde{P}}$ порождает группу симметрий тогда и только тогда, когда существует функция $C(t)$, такая, что функция $P(x, t) = \tilde{P}(x, t) - C(t)$ является первым интегралом. Заметим, что, даже когда обе функции $H(x)$ и $\tilde{P}(x)$ не зависят от времени, первый интеграл $P(x, t) = \tilde{P}(x) - C(t)$ может оказаться зависящим от времени! (Именно такой случай имел место в примере 6.32.) Дальнейшие сведения об этом случае см. в упр. 6.2.

Пример 6.34. Уравнения движения n материальных точек, попарные взаимодействия которых определяются потенциальными силами, обсуждавшиеся в примере 4.31, можно привести к каноническому гамильтонову виду. За канонические координаты примем положения $\mathbf{q}_i = (x^i, y^i, z^i)$ и импульсы $\mathbf{p}_i = (\xi^i, \eta^i, \zeta^i) =$

$=m_i\dot{\mathbf{q}}_i$, $i=1, \ldots, n$. Гамильтонианом является полная энергия

$$H(p, q)=K(p)+U(q)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i}+\sum_{i<j}m_im_jV(\|\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_j\|),$$

где потенциал $V(r)$ зависит только от расстояния между точками. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i},\quad \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}=\frac{\mathbf{p}_i}{m_i},\quad i=1, \ldots, n.$$

Некоторые геометрические группы симметрий видны непосредственно. Одновременный сдвиг всех масс в данном направлении $\mathbf{a}=(a^1, a^2, a^3)$ порожден гамильтоновым векторным полем

$$\hat{\mathbf{v}}_P=\sum_{i=1}^{n}\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^i}+a^2\frac{\partial}{\partial y^i}+a^3\frac{\partial}{\partial z^i}\right)$$

и соответствует первому интегралу $P=\sum_i \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}_i$, представляющему собой импульс в данном направлении. Аналогичным образом, группа $SO(3)$ одновременных вращений всех масс относительно начала координат порождает интегралы моментов количества движения. Например, момент количества движения $Q=\sum_i (x^i\eta^i-y^i\xi^i)$ относительно оси z порождает группу симметрий

$$\hat{\mathbf{v}}_Q=\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\frac{\partial}{\partial y^i}-y^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial \eta^i}-\eta^i\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)$$

одновременных вращений относительно оси z. Помимо шести законов сохранения импульса — трех компонент импульса и трех компонент момента количества движения — постоянство самого гамильтониана обеспечивает закон сохранения энергии. Еще три первых интеграла порождены равномерным движением центра масс, что дает еще три группы гамильтоновых симметрий. Например, в направлении оси x имеем

$$R=\sum_{i=1}^{n}m_ix^i-t\sum_{i=1}^{n}\xi^i=\mathrm{const},$$

и, следовательно, векторное поле

$$\hat{\mathbf{v}}_R=-\sum_{i=1}^{n}\left(t\frac{\partial}{\partial x^i}+m_i\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)$$

порождает однопараметрическую группу галилеевых преобразований.

Понижение порядка в гамильтоновых системах

Понижение порядка в гамильтоновых ситемах обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью группы симметрий выполняется аналогично методам § 4.3 для уравнений Эйлера—Лагранжа, но к тому же получает при этом немедленную геометрическую интерпретацию. Заметим, что, если исходная скобка Пуассона вырожденна, мы всегда можем ограничиться рассмотрением отдельного симплектического слоя. Таким образом, всякая непостоянная отмеченная функция понижает порядок системы на единицу. Остальные первые интегралы, порождающие нетривиальные группы симметрий, позволяют понизить порядок на две единицы. Ограничимся для простоты не зависящими от времени первыми интегралами.

Теорема 6.35. *Предположим, что векторное поле* $\hat{\mathbf{v}}_P \neq 0$ *порождает гамильтонову группу симметрий гамильтоновой системы* $\dot{x} = J\nabla H$, *соответствующую не зависящему от времени первому интегралу* $P(x)$. *Тогда существует редуцированная гамильтонова система, число переменных в которой меньше на две единицы, такая, что любое решение исходной системы может быть получено одной квадратурой из некоторого решения редуцированной системы.*

Доказательство. Доказательство такое же, как и в первом шаге доказательства теоремы Дарбу 6.22. Введем новые переменные $p = P(x)$, $q = Q(x)$, $y = (y^1, \ldots, y^{m-2}) = Y(x)$, выпрямляющие симметрию, так что $\hat{\mathbf{v}}_P = \partial_q$ в координатах (p, q, y). Структурная матрица в этих координатах принимает вид

$$J(p, q, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -a^T & \tilde{J} \end{pmatrix},$$

где $a(p, q, y)$ — вектор-строка длины $m-2$, а $\tilde{J}(p, y)$ — кососимметричная матрица размера $(m-2)\times(m-2)$, не зависящая от q и для каждого фиксированного значения p являющаяся структурной матрицей скобки Пуассона в переменных y. (Если координаты $y = (y^1, \ldots, y^{m-2})$ выбраны плоскими, как и при доказательстве теоремы Дарбу, то $a = 0$ и матрица $\tilde{J}(y)$ не зависит и от p, как мы видели ранее. Однако для процедуры редукции в этом нет необходимости, а выбор таких координат на практике не всегда осуществим.) Доказательство предыдущих утверждений относительно структурной матрицы проводится аналогично «плоскому» случаю.

При любом фиксированном значении первого интеграла $p = P(x)$ редуцированная система будет гамильтоновой относительно редуцированной структурной матрицы $\tilde{J}(p, y)$. Заметим, что в координатах (p, q, y)

$$0 = \{p, H\} = -\hat{\mathbf{v}}_p(H) = -\partial H/\partial q,$$

и, следовательно, функция $H = H(p, y)$ также зависит только от p и y. Поэтому уравнения Гамильтона принимают вид

$$\frac{dp}{dt} = 0, \tag{6.27a}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p} + \sum_{j=1}^{m-2} a^j(p, y)\frac{\partial H}{\partial y^j}, \tag{6.27b}$$

$$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{j=1}^{m-2} \tilde{J}^{ij}(p, y)\frac{\partial H}{\partial y^j}, \quad i = 1, \ldots, m-2. \tag{6.27c}$$

Первое равенство утверждает (как и должно быть), что p постоянно. При фиксированном значении p $m-2$ уравнений (6.27c) образуют гамильтонову систему относительно структурной матрицы $\tilde{J}(p, y)$ с гамильтонианом $H(p, y)$; это и есть редуцированная система, о которой говорится в теореме. Наконец, уравнение (6.27b) описывает эволюцию во времени последней координаты q. Так как его правая часть не зависит от q, то, зная решение редуцированной системы (6.27c), мы можем проинтегрировать его с помощью единственной квадратуры. □

Пример 6.36. Рассмотрим на $M = \mathbb{R}^4$ с канонической скобкой Пуассона гамильтониан вида

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1 - q_2).$$

Соответствующая гамильтонова система

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = p_2, \quad \frac{dp_1}{dt} = -V'(q_1 - q_2), \quad \frac{dp_2}{dt} = V'(q_1 - q_2) \tag{6.28}$$

описывает движение пары частиц единичной массы на прямой, взаимодействие между которыми задается потенциалом $V(r)$, зависящим от их взаимного расположения. Эта система, очевидно, инвариантна относительно сдвига $\mathbf{v} = \partial_{q_1} + \partial_{q_2}$, причем соответствующий интеграл — импульс $p_1 + p_2$. Согласно теореме 6.35, мы можем понизить порядок системы на две единицы, введя новые координаты

$$p = p_1 + p_2, \quad q = q_1, \quad y = p_1, \quad r = q_1 - q_2,$$

выпрямляющие поле $\mathbf{v} = \partial_q$. В новых переменных гамильтониан принимает вид

$$H(p, y, r) = y^2 - py + \frac{1}{2} p^2 + V(r), \tag{6.29}$$

а скобка Пуассона равна

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Далее, гамильтонова система расщепляется на две:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial y} = y$$

и

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial r} = -V'(r), \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = 2y - p. \tag{6.30}$$

Решение первой пары уравнений

$$p = a, \quad q = \int y(t)\,dt + b$$

(a и b постоянные) можно получить из решений второй пары (6.30). Последние образуют редуцированную гамильтонову систему относительно скобки Пуассона $\{\tilde{F}, \tilde{H}\} = \tilde{F}_r\tilde{H}_y - \tilde{F}_y\tilde{H}_r$ для функций, зависящих от y и r, с энергией (6.29), если положить $p = a$. Вскоре мы увидим, как можно явно проинтегрировать двумерную систему (6.30), решив, таким образом, исходную систему для двух частиц.

Как и в случае общего метода редукции для обыкновенных дифференциальных уравнений, если векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_P$, соответствующее первому интегралу P, оказывается слишком сложным, не всегда можно явно найти выпрямляющую его замену координат, и поэтому редукцию нельзя завершить. (Конечно, если P является первым интегралом, то понижение порядка на единицу возможно всегда.) Если, например, гамильтониан $H(x)$ не зависит от времени, то он дает первый интеграл, однако задача выпрямления соответствующего векторного поля $\hat{\mathbf{v}}_H$ совпадает с задачей решения самой гамильтоновой системы! В этом частном случае, однако, ввиду того, что поле $\hat{\mathbf{v}}_H$ эквивалентно образующей ∂_t симметрии сдвига по времени, мы можем понизить порядок системы на две единицы, если нас устраивает переход к зависящему от времени гамильтониану.

Предложение 6.37. *Пусть $\dot{x} = J\nabla H$ — гамильтонова система, в которой $H(x)$ не зависит от t. Тогда существует редуцированная зависящая от времени гамильтонова система, число переменных в которой на две единицы меньше, такая, что решения исходной системы можно получить из решений редуцированной системы с помощью квадратур.*

Доказательство. Само по себе понижение порядка на две единицы получается легко. Во-первых, ввиду постоянства гамильтониана H мы можем перейти на поверхность уровня $H(x) = c$, понизив при этом порядок на единицу. Далее, получившаяся система остается автономной, и поэтому ее порядок снова можно понизить, используя метод примера 2.67. Проблема в том, что при неаккуратном выборе координат гамильтоновость полученной такой редукцией системы оказывается неочевидной.

Легче всего начать с введения координат (p, q, y), использовавшихся при доказательстве теоремы Дарбу 6.22, в которых исходная система принимает вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy^i}{dt} = \sum_{j=1}^{m-2} \tilde{J}^{ij}(y)\frac{\partial H}{\partial y^j}, \quad i = 1, \ldots, m-2.$$

Предположим, что $\partial H/\partial p \neq 0$, так что мы можем найти локальное решение уравнения $w = H(p, q, y)$ относительно p: $p = K(w, q, y)$. (Если $\partial H/\partial p = 0$ всюду, то q является первым интегралом, и применима предыдущая процедура редукции!) Приняв t, w и y за новые зависимые переменные, а q за новую независимую переменную, перепишем систему в виде

$$\frac{dt}{dq} = \frac{1}{\partial H/\partial p} = \frac{\partial K}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dq} = 0, \tag{6.31a}$$

$$\frac{dy^i}{dq} = \sum_{j=1}^{m-2} \tilde{J}^{ij}(y)\frac{\partial H/\partial y^j}{\partial H/\partial p} = \sum_{j=1}^{m-2} \tilde{J}^{ij}(y)\frac{\partial K}{\partial y^j}. \tag{6.31b}$$

Система (6.31b) является гамильтоновой относительно структурной матрицы $\tilde{J}(y)$ и гамильтониана $K(w, q, y)$. Решив при данном фиксированном значении w систему (6.31b), мы можем из уравнения (6.31a) найти оставшуюся переменную $t(q)$ с помощью единственной квадратуры. Этим завершается доказательство. □

Пример 6.38. Мы можем использовать этот метод для явного интегрирования автономной гамильтоновой системы

$$q_t = \partial H/\partial p, \quad p_t = -\partial H/\partial q$$

на плоскости. Выразим сначала из уравнения $w = H(p, q)$ одну из координат, скажем p, через q и w, причем w является константой. При этом первое уравнение остается автономным уравнением относительно q, и его можно решить с помощью квадратуры. Например, для простого маятника $H(p, q) = (1/2)p^2 + (1 - \cos q)$, поэтому на кривой уровня $H = \omega + 1$, $p = \sqrt{2(\omega + \cos q)}$. Оставшееся уравнение

$$dq/dt = p = \sqrt{2(\omega + \cos q)}$$

разрешимо с помощью эллиптических функций Якоби

$$q(t) = 2\sin^{-1}\{\mathrm{sn}(k^{-1}(t + \delta), k)\},$$

где модуль функции sn равен $k = \sqrt{2/(\omega + 1)}$.

Аналогично, для системы двух точек на прямой из примера 6.36, полагая $H(y, r) = \omega + (1/4)p^2$, находим

$$y = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\omega - V(r)},$$

откуда решение восстанавливается простым интегрированием уравнения

$$\frac{dr}{dt} = 2y - p = \pm 2\sqrt{\omega - V(r)}.$$

Пример 6.39. Рассмотрим уравнения движения твердого тела (6.18), представленные в виде гамильтоновой системы на $\mathfrak{so}(3)^*$. Отмеченная функция $C(u) = |u|^2$ естественно понижает порядок системы на единицу при ограничении на ее поверхность уровня (орбиту коприсоединенного представления). Если не все моменты инерции I_1, I_2, I_3 равны между собой, то сам гамильтониан дает еще один независимый первый интеграл. Отсюда заключаем, что интегральные кривые данного гамильтонова векторного поля даются пересечением сферы $\{C(u) = |u|^2 = c\}$ и эллипсоида $\{H(u) = \omega\}$, образующим общее множество уровня этих двух первых интегралов. Явные решения можно получить, исключив две из переменных, скажем u^2 и u^3, из пары уравнений $C(u) = c$, $H(u) = \omega$. Оставшееся уравнение относительно $u^1 = y$ является по предложению 6.37 автономным, и поэтому его можно проинтегрировать. Оказывается, оно имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\alpha(\beta^2 - y^2)(\gamma^2 - y^2)},$$

и, значит, решения выражаются через эллиптические функции. Явную формулу и ее геометрическую интерпретацию можно найти в книге Whittakez [1, гл. 6].

Редукция с помощью многопараметрических групп

Как мы уже видели, в случае уравнений Эйлера — Лагранжа (ср. упр. 4.11) гамильтонова система, допускающая r-параметрическую группу симметрий, не всегда допускает понижение порядка на $2r$ единиц, даже если эта группа разрешима. В гамильтоновом случае, однако, можно вычислить степень понижения порядка, которой удается достичь. Интересно, что этот вопрос тесно связан со структурой коприсоединенного действия группы симметрий на своей алгебре Ли. Начнем с рассмотрения примера.

Пример 6.40. Рассмотрим на многообразии $M = \mathbb{R}^4$ с каноническими координатами $(p, \tilde{p}, q, \tilde{q})$ гамильтониан вида $H(\tilde{p}, pe^{\tilde{q}}, t)$, Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = e^{\tilde{q}} H_r, \quad \frac{d\tilde{p}}{dt} = -pe^{\tilde{q}} H_r, \quad \frac{d\tilde{q}}{dt} = H_{\tilde{p}}, \tag{6.32}$$

где $r = pe^{\tilde{q}}$ — второй аргумент функции H. Эти уравнения допускают двупараметрическую группу симметрий, порожденную векторными полями

$$\mathbf{v} = \partial_q, \quad \mathbf{w} = -p\partial_p + q\partial_q + \partial_{\tilde{q}},$$

соответствующими двум первым интегралам $P = p$, $Q = pq + \tilde{p}$. Несмотря на это, в общей точке мы можем понизить порядок системы (6.32) лишь на две единицы! На самом деле эту редукцию можно провести четырьмя различными способами, и мы рассмотрим их по очереди.

(1) Проще всего непосредственно использовать два первых интеграла и ограничить систему на общую поверхность уровня. Пусть $s = pq + \tilde{p}$, так что s и p — постоянные. Рассматривая p, $\tilde{p}$, r, s как новые переменные (это возможно, если $p \neq 0$), запишем редуцированную систему в виде

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -rH_r, \quad \frac{dr}{dt} = rH_{\tilde{p}}, \tag{6.33}$$

который является гамильтоновым относительно редуцированной скобки Пуассона $\{F, H\} = r(F_r H_{\tilde{p}} - F_{\tilde{p}} H_r)$. Однако система (6.33) не сохраняет свойств инвариантности системы (6.32) относительно полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$; поэтому, если не накладывать специальных условий на функцию $H(\tilde{p}, r, t)$ (скажем, независимость от времени), дальнейшее понижение порядка невозможно.

(2) Другой способ: мы можем использовать процедуру редукции из теоремы 6.35 по отношению к гамильтоновой симметрии $\mathbf{v}$. Координаты уже имеют подходящий вид, если положить $y = (\tilde{p}, \tilde{q})$. Фиксируя p, видим, что после решения третьего

и четвертого уравнений в (6.32) относительно $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ мы можем определить q с помощью квадратуры. Редуцированная система относительно $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ является канонической гамильтоновой системой, но вторая группа гамильтоновых симметрий исходной системы не дает ни симметрии, ни первого интеграла. Вновь порядок можно понизить только на две единицы.

(3) Редукция с помощью группы симметрий, порожденной полем $\mathbf{w}$, приводит к аналогичным выводам. Подходящие плоские координаты имеют вид $s = pq + \tilde{p}$, $\tilde{q}$, $r = pe^{\tilde{q}}$ и $z = qe^{-\tilde{q}}$; в этих координатах $\mathbf{w} = \partial_{\tilde{q}}$, $H = H(s - rz, r, t) = \tilde{H}(r, s, z, t)$. Система принимает вид

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{d\tilde{q}}{dt} = \tilde{H}_s, \quad \frac{dr}{dt} = -\tilde{H}_z, \quad \frac{dz}{dt} = \tilde{H}_r. \tag{6.34}$$

При фиксированном s третье и четвертое уравнения образуют гамильтонову систему, решения которой позволяют вычислить $\tilde{q}$ посредством квадратуры. Вновь не имеется ни симметрии, ни первого интеграла, отражающих инвариантность исходной системы относительно поля $\mathbf{v}$.

(4) Мы можем, наконец, полностью игнорировать гамильтонову структуру системы (6.32) и понижать порядок с помощью процедуры § 2.5. Заметив, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}$, понизим порядок сначала с помощью $\mathbf{v}$, это просто. А именно, зная решение первого, третьего и четвертого уравнений в (6.32), мы можем определить $q(t)$ посредством квадратуры. Полученная система третьего порядка сохраняет инвариантность относительно редуцированного векторного поля $\tilde{\mathbf{w}} = -p\partial_p + \partial_{\tilde{q}}$. Положим $r = pe^{\tilde{q}}$ и примем за переменные r, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$. Полученный результат совпадает с системой (6.33), и $\tilde{q}$ (а таким образом и q) могут быть определены посредством квадратуры. Как и в случае (2), дальнейшая редукция, вообще говоря, невозможна!

Наконец, отметим, что при некоторых начальных условиях, скажем $p = 0$, решение можно выписать посредством одних квадратур. Таким образом, степень возможной редукции, оказывается, зависит как от структуры группы симметрий, так и от начальных условий, при которых мы ищем решение.

Гамильтонова группа преобразований

В дальнейшем рассматриваемая группа симметрий будет предполагаться гамильтоновой в следующем строгом смысле.

Определение 6.41. Пусть M — пуассоново многообразие. Пусть G — группа Ли со структурными константами c_{ij}^k, i, j, $k = 1, \ldots, r$, в некотором базисе ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Функции

$P_1, \ldots, P_r$: $M \to \mathbb{R}$ порождают *гамильтоново действие* группы G на M, если их скобки Пуассона удовлетворяют соотношениям

$$\{P_i, P_j\} = -\sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k P_k, \quad i, j = 1, \ldots, r.$$

Заметим, что благодаря условиям (6.8) соответствующие гамильтоновы векторные поля $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_{P_i}$ удовлетворяют тем же (с точностью до знака) коммутационным соотношениям

$$[\hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{v}_k$$

и поэтому по теореме 1.57 задают локальное действие группы G на M. Мы будем говорить, что G является *гамильтоновой группой симметрий* для данной гамильтоновой системы на M, если каждая из ее порождающих функций P_i является первым интегралом: $\{P_i, H\} = 0$, $i = 1, \ldots, r$, откуда следует, что каждое векторное поле $\mathbf{v}_i$ порождает однопараметрическую группу симметрий.

Как мы видели в § 2.5 и упр. 3.12, любая система дифференциальных уравнений первого порядка на многообразии M, допускающая регулярную группу симметрий G, сводится к системе первого порядка на фактормногообразии M/G. (Конечно, если группа G неразрешима, мы не сможем восстановить решения исходной системы по решениям приведенной системы с помощью квадратур, но в данный момент нас это не интересует.) В случае когда многообразие M пуассоново, а G является гамильтоновой группой преобразований, фактормногообразие естественным образом наследует пуассонову структуру, относительно которой редуцированная система оказывается гамильтоновой. Кроме того, степень вырожденности скобки Пуассона на M/G будет определять, насколько мы можем понизить порядок системы с помощью отмеченных функций на факторпространстве.

Теорема 6.42. *Пусть G — гамильтонова группа преобразований, регулярно действующая на пуассоновом многообразии M. Тогда фактормногообразие M/G наследует пуассонову структуру, так что для любой пары функций $\tilde{F}, \tilde{H}$: $M/G \to \mathbb{R}$, соответствующих G-инвариантным функциям F, H: $M \to \mathbb{R}$, их скобка Пуассона $\{\tilde{F}, \tilde{H}\}_{M/G}$ соответствует G-инвариантной функции $\{F, H\}_M$. Кроме того, если G — гамильтонова группа симметрий гамильтоновой системы на M, то существует редуцированная гамильтонова система на M/G, решения которой являются проекциями решений исходной системы на M.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что скобка Пуассона $\{F, H\}$ двух G-инвариантных функций является G-инвариантной функцией; это непосредственно следует из тождества Якоби и связности группы G. Действительно, для $i = 1, \ldots, r$

$$\hat{\mathbf{v}}_i(\{F, H\}) = \{\{F, H\}, P_i\} = \{\{F, P_i\}, H\} + \{F, \{H, P_i\}\} = 0,$$

так как F и H инвариантны, что и доказывает выполнение условия инфинитезимальной инвариантности (2.1). Таким образом, скобка Пуассона корректно определена на M/G; проверка условий определения 6.1 тривиальна.

Пусть теперь G является гамильтоновой группой симметрий гамильтониана H: $M \to \mathbb{R}$; тогда H автоматически является G-инвариантной функцией: $\hat{\mathbf{v}}_i(H) = \{H, P_i\} = 0$, так как каждая из функций P_i по предположению — первый интеграл. Пусть $\tilde{H}$: $M/G \to \mathbb{R}$ — соответствующая функция на фактормногообразии. Чтобы проверить, что соответствующие гамильтоновы векторные поля связаны между собой естественной проекцией π: $M \to M/G$: $d\pi(\hat{\mathbf{v}}_H) = \hat{\mathbf{v}}_{\tilde{H}}$, достаточно заметить, что ввиду определения (1.24)

$$d\pi(\hat{\mathbf{v}}_H)(\tilde{F}) \circ \pi = \hat{\mathbf{v}}_H[\tilde{F} \circ \pi] = \{\tilde{F} \circ \pi, H\}_M$$

для любой функции $\tilde{F}$: $M/G \to \mathbb{R}$. Но в силу определения скобки Пуассона на M/G это выражение равно

$$\{\tilde{F}, \tilde{H}\}_{M/G} \circ \pi = \hat{\mathbf{v}}_{\tilde{H}}(\tilde{F}) \circ \pi,$$

и соответствие доказано. □

Пример 6.43. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^6$ с каноническими координатами $(p, q) = (p^1, p^2, p^3, q^1, q^2, q^3)$. Функции

$$P_1 = q^2p^3 - q^3p^2, \quad P_2 = q^3p^1 - q^1p^3, \quad P_3 = q^1p^2 - q^2p^1$$

удовлетворяют скобочным соотношениям

$$\{P_1, P_2\} = P_3, \quad \{P_2, P_3\} = P_1, \quad \{P_3, P_1\} = P_2$$

и поэтому порождают гамильтоново действие группы вращений $SO(3)$ на $\mathbb{R}^6$, которое на самом деле имеет вид $(p, q) \longmapsto (Rp, Rq)$, $R \in SO(3)$. Это действие регулярно на открытом подмножестве $M = \{(p, q)\colon p, q$ линейно независимы$\}$, его орбиты трехмерны, а глобальные инварианты имеют вид

$$\xi(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2, \quad \eta(p, q) = p \cdot q, \quad \zeta(p, q) = \frac{1}{2}|q|^2.$$

Таким образом, мы можем отождествить соответствующее фактормногообразие с подмножеством $M/G \simeq \{(x, y, z)\colon\ x > 0, z > 0,\ y^2 < 4xz\}$ в $\mathbb{R}^3$, в котором введены новые координаты $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$.

Как вычислить редуцированную скобку Пуассона на M/G? Ввиду предложения 6.10 нам достаточно вычислить базисные скобки Пуассона между инвариантами ξ, η, ζ с помощью скобки Пуассона на самом многообразии M, а затем выразить их через сами эти инварианты. Например, из равенства

$$\{\xi,\ \eta\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial q^i}\frac{\partial\eta}{\partial p^i} - \frac{\partial\xi}{\partial p^i}\frac{\partial\eta}{\partial q^i}\right) = -\sum_{i=1}^{3}(p^i)^2 = -2\xi$$

получаем $\{x,\ y\}_{M/G} = -2x$. Аналогично, скобочные соотношения $\{\xi, \zeta\} = -\eta$, $\{\eta, \zeta\} = -2\zeta$ на M приводят к структурным функциям $\{x,\ z\}_{M/G} = -y$, $\{y,\ z\}_{M/G} = -2z$ на M/G. Таким образом, структурная матрица на M/G равна

$$J/G = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -y \\ 2x & 0 & -2z \\ y & 2z & 0 \end{pmatrix},$$

а скобка Пуассона имеет вид

$$\{\tilde F,\ \tilde H\} = -2x(\tilde F_x\tilde H_y - \tilde F_y\tilde H_x) - y(\tilde F_x\tilde H_z - \tilde F_z\tilde H_x) - 2z(\tilde F_y\tilde H_z - \tilde F_z\tilde H_y).$$

Любая гамильтонова система на M, для которой моменты количества движения P_i являются первыми интегралами, сводится к некоторой гамильтоновой системе на M/G. Такова, например, общая задача Кеплера о движении массы в центральном поле сил с потенциалом $V(r)$. Гамильтонианом в данном случае является энергия $H(p, q) = (1/2)|p|^2 + V(|q|)$. Для получения редуцированной системы на M/G выразим H через инварианты и восстановим гамильтоново векторное поле с помощью данной скобки Пуассона. Редуцированный гамильтониан примет вид $\tilde H(x,\ y,\ z) = x + \tilde V(z)$, где $\tilde V(z) = V(\sqrt{2z})$, а редуцированная система имеет вид

$$x_t = -y\tilde V'(z), \quad y_t = 2x - 2z\tilde V'(z), \quad z_t = y. \tag{6.35}$$

(Возможно, читатель получит удовольствие, выведя эти уравнения непосредственно из уравнений Гамильтона на M.)

Многообразие M/G трехмерно, поэтому на нем существует по крайней мере одна отмеченная функция. Легко видеть, что это функция $C(x, y, z) = 4xz - y^2$, инвариантная относительно любой гамильтоновой системы на M/G. (В исходных переменных $C = |p \times q|^2$.) Гиперболоиды $4xz - y^2 = k^2$, будучи поверхностями уровня функции C, являются слоями симплектического слоения, и мы можем ограничить систему (6.35) на любой такой слой. Окончательно редуцированная система записывается в координатах (x, z) в виде

$$x_t = -\sqrt{4xz - k^2}\,\tilde{V}'(z), \quad z_t = \sqrt{4xz - k^2} \tag{6.36}$$

и является гамильтоновой относительно индуцированной скобки Пуассона $\{\tilde{F}, \tilde{H}\} = -\sqrt{4xz - k^2}(\tilde{F}_x\tilde{H}_z - \tilde{F}_z\tilde{H}_x)$ на гиперболонде. Эту последнюю двумерную систему можно решить методом предложения 6.37, и поэтому редуцированная система (6.35) разрешима в квадратурах. Однако на этом этапе мы не можем использовать данное решение для интегрирования исходной задачи о притяжении к центру, так как группа SO(3) не разрешима. Но, как мы вскоре увидим, эту трудность можно обойти с помощью иного подхода к процедуре редукции.

Отображение момента

Приведенный выше подход к задаче редукции, несмотря на обращение к геометрии, сохраняет необходимость в вычислениях. Проблема в том, что мы сосредотачиваемся на более сложном аспекте гамильтоновой группы симметрий, а именно рассматриваем ее как группу преобразований и забываем про имеющиеся первые интегралы до тех пор, пока не окончена редукция по симметрии. Здесь они проявляют себя как отмеченные функции. Логичнее было бы сначала ограничить систему на их общее множество уровня, а затем завершить редукцию с помощью остаточной симметрии полученной системы. Оказывается, что эта процедура эквивалентна приведенной выше, но мы сохраняем больше шансов на восстановление решения исходной системы посредством одних квадратур.

На первом шаге следует придать первым интегралам, доставляемым гамильтоновой группой симметрий, более естественную структуру. Здесь и появляется алгебра, двойственная к алгебре Ли симметрий, и, следовательно, коприсоединенное действие.

Определение 6.44. Пусть G — гамильтонова группа преобразований, действующая на пуассоновом многообразии M, порожденная вещественнозначными функциями $P_1, \ldots, P_r$. *Отображение момента* для группы G — это гладкое отображение $P\colon M \to \mathfrak{g}^*$, задаваемое формулой

$$P(x) = \sum_{i=1}^{r} P_i(x)\,\omega_i,$$

где $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ — базис в $\mathfrak{g}^*$, двойственный к базису $\{\widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots$ $\ldots, \widehat{\mathbf{v}}_r\}$ в $\mathfrak{g}$, относительно которого вычислены структурные константы c_{ij}^k.

Ключевое свойство, которое объясняет, почему мы требуем, чтобы отображение момента принимало значения в $\mathfrak{g}^*$, — это его инвариантность (или, точнее, «эквивариантность») относительно коприсоединенного представления группы G на $\mathfrak{g}^*$.

Предложение 6.45. *Пусть P: $M \to \mathfrak{g}^*$ — отображение момента, определенное гамильтоновым действием группы G на пуассоновом многообразии M. Тогда*

$$P(g \cdot x) = \mathrm{Ad}^* g(P(x)) \tag{6.37}$$

для всех $x \in M$, $g \in G$.

Доказательство. Как обычно, достаточно проверить справедливость инфинитезимальной формы этого равенства:

$$dP(\widehat{\mathbf{v}}_j|_x) = \mathrm{ad}^* \widehat{\mathbf{v}}_j|_{P(x)}, \quad x \in M, \tag{6.38}$$

для любой образующей $\widehat{\mathbf{v}}_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, r$, группы G. Отождествив $T\mathfrak{g}^*|_{P(x)}$ с самим пространством $\mathfrak{g}^*$, получаем

$$dP(\widehat{\mathbf{v}}_j|_x) = \sum_{i=1}^r \widehat{\mathbf{v}}_j(P_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^r \{P_i, P_j\}(x)\,\omega_i = -\sum_{i,k=1}^r c_{ij}^k P_k(x)\,\omega_i,$$

ср. (1.24), (6.4). Ввиду равенства (6.24) это выражение совпадает с правой частью равенства (6.38).

Чтобы доказать равенство (6.37), заметим, что, дифференцируя по ε равенство $g = \exp(\varepsilon\widehat{\mathbf{v}}_j)$, получаем равенство (6.38) в точке $\tilde{x} = \exp(\varepsilon\widehat{\mathbf{v}}_j)x$. Так как оно выполняется при всех $\tilde{x}$, обычные соображения связности доказывают справедливость равенства (6.37) в целом. □

Пример 6.46. Рассмотрим гамильтоново действие группы $SO(3)$ на $\mathbb{R}^6$, описанное в примере 6.43. Отображение момента имеет вид

$$P(p, q) = (q^2p^3 - q^3p^2)\,\omega_1 + (q^3p^1 - q^1p^3)\,\omega_2 + (q^1p^2 - q^2p^1)\,\omega_3,$$

где $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — базис в пространстве $\mathfrak{so}(3)^*$ из примера 6.9. Заметим, что при отождествлении $\mathfrak{so}(3)^*$ с $\mathbb{R}^3$ функция $P(p, q) =$ $= q \times p$ совпадает с векторным произведением векторов в $\mathbb{R}^3$. В этом случае $SO(3)$ действует на $\mathfrak{so}(3)^*$ вращениями, и эквивариантность отображения момента есть просто переформулировка инвариантности векторного произведения относительно вращений: $R(q\times p)=(Rq)\times(Rp)$ для $R\in \mathrm{SO}(3)$.

Далее, всякая гамильтонова система с гамильтоновой группой симметрий G, как отмечалось раньше, естественно ограничивается до системы обыкновенных дифференциальных уравнений на общем множестве уровня $\{P_i(x)=c_i\}$ данных первых интегралов. Заметим, что эти общие множества уровня суть просто множества уровня отображения момента, которые мы будем обозначать через $\mathcal{S}_\alpha=\{x\colon\ P(x)=\alpha\}$, где $\alpha=\sum c_i\omega_i\in \mathfrak{g}^*$. Кроме того, приведенная система автоматически сохраняет инвариантность относительно *остаточной группы симметрий*

$$G_\alpha\equiv\{g\in G\colon\ g\cdot\mathcal{S}_\alpha\subset\mathcal{S}_\alpha\},$$

состоящей из элементов, сохраняющих выбранное множество уровня. Вот простое описание этой остаточной группы.

Предложение 6.47. *Пусть $P\colon M\to\mathfrak{g}^*$ — отображение момента, ассоциированное с гамильтоновым действием некоторой группы. Тогда остаточная группа симметрий множества уровня $\mathcal{S}_\alpha=\{P(x)=\alpha\}$ совпадает с подгруппой изотропии элемента $\alpha\in\mathfrak{g}^*$:*

$$G_\alpha=\{g\in G\colon\ \mathrm{Ad}^*g(\alpha)=\alpha\}.$$

Кроме того, если элемент $g\in G$ переводит некоторую точку $x\in\mathcal{S}_\alpha$ в точку $g\cdot x\in\mathcal{S}_\alpha$, то g лежит в G_α и обладает этим свойством для всех $x\in\mathcal{S}_\alpha$.

Доказательство. По определению $g\in G_\alpha$ тогда и только тогда, когда $P(g\cdot x)=\alpha$, если $P(x)=\alpha$. Но ввиду эквивариантности P

$$\alpha=P(g\cdot x)=\mathrm{Ad}^*g(P(x))=\mathrm{Ad}^*g(\alpha),$$

и поэтому g лежит в подгруппе изотропии элемента α. Второе утверждение легко следует из этого равенства. □

Заметим, что остаточная алгебра Ли, соответствующая группе G_α, совпадает с *подалгеброй изотропии* $\mathfrak{g}_\alpha\equiv\{\mathbf{v}\in\mathfrak{g}\colon \mathrm{ad}^*\mathbf{v}|_\alpha=0\}$, которую можно непосредственно вычислить. В частности, размерность группы G_α совпадает с размерностью ее алгебры Ли $\mathfrak{g}_\alpha$. Например, если группа Ли G абелева, то ее коприсоединенное представление тривиально, $\mathrm{Ad}^*g(\alpha)=\alpha$ для всех $g\in G$, $\alpha\in\mathfrak{g}^*$; поэтому $G_\alpha=G$ для каждого α. Таким образом, всякая гамильтонова система, допускающая абелеву гамильтонову группу симметрий, остается инвариантной относительно полной группы даже после ограничения на общее множество уровня $\mathcal{S}_\alpha$. Отсюда следует, что мы всегда можем понизить порядок такой системы на $2r$ единиц, т. е. на удвоенную размерность группы. В качестве второго примера рассмотрим двупараметрическую разрешимую группу из примера 6.40. В этом случае отображение момента имеет вид

$$P(p,\ q,\ \tilde{p},\ \tilde{q}) = p\omega_1 + (pq + \tilde{p})\,\omega_2,$$

где $\{\omega_1, \omega_2\}$ — базис в пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственный к базису $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Коприсоединенное представление элемента $g = \exp(\varepsilon_1\mathbf{v} + \varepsilon_2\mathbf{w})$ имеет вид

$$\mathrm{Ad}^*\, g\,(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = e^{-\varepsilon_2}c_1\omega_1 + \left(\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}(e^{-\varepsilon_2} - 1)\,c_1 + c_2\right)\omega_2$$

(с подходящими предельными значениями при $\varepsilon_2 = 0$). Таким образом, подгруппа изотропии любого элемента $\alpha = c_1\omega_1 + c_2\omega_2$ тривиальна, если только $c_1 \neq 0$; в противном случае она совпадает со всей группой G. Мы ожидаем поэтому, что при $c_1 \neq 0$ ограничение гамильтоновой системы с группой симметрий G на множество уровня $\mathcal{S}_\alpha = \{p = c_1,\ pq + \tilde{p} = c_2\}$ не имеет остаточной группы симметрий, а при $c_1 = 0$ остаточная группа симметрий совпадает со всей группой G. В точности это мы и наблюдаем.

Идея состоит в том, чтобы, ограничив гамильтонову систему на множество уровня $\mathcal{S}_\alpha$, использовать методы § 2.5 для дальнейшего понижения порядка с помощью остаточной группы симметрий G_α. При некоторых предположениях о регулярности действия группы фактормногообразие $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$, на котором будет определена окончательно редуцированная система, можно естественным образом отождествить с некоторым пуассоновым многообразием в M/G. Таким образом, окончательно редуцированная система сама наследует гамильтонову структуру. В частности, если остаточная группа G_α (а не сама группа G) разрешима, мы можем восстановить решения исходной системы на $\mathcal{S}_\alpha$ по решениям окончательно редуцированной системы на $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$ посредством квадратур. Приведем общее утверждение.

Теорема 6.48. *Пусть M — пуассоново многообразие, а G — регулярная гамильтонова группа преобразований. Пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Предположим, что ранг отображения момента P: $M \to \mathfrak{g}^*$ максимален всюду на множестве уровня $\mathcal{S}_\alpha = P^{-1}\{\alpha\}$ и что остаточная группа симметрий G_α действует на подмногообразии $\mathcal{S}_\alpha$ регулярно. Тогда существует естественное погружение φ, превращающее многообразие $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$ в пуассоново подмногообразие* *в M/G таким образом, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathcal{S}_\alpha \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & & M/G \\ & \mathcal{S}_\alpha/G_\alpha \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{6.39}$$

коммутативна. (Через π и π_α обозначаются естественные проекции, через i — погружение $\mathcal{S}_\alpha$ как подмногообразия в M.) Кроме того, любая гамильтонова система на M, допускающая G в качестве гамильтоновой группы симметрий, естественным образом ограничивается до систем на других пространствах в диаграмме (6.39), *которые являются гамильтоновыми на M/G и на $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$ и связаны соответствующими отображениями. В частности, гамильтонова система на $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$ получается путем ограничения на $\mathcal{S}_\alpha$ и последующей проекции с помощью π_α.*

Доказательство. Будем предполагать, что G — глобальная группа преобразований, хотя доказательство легко переносится и на локальный случай. Согласно диаграмме, если $z=\pi_\alpha(x)\in \mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$, то мы должны положить $\varphi(z)=\pi(x)\in M/G$. Заметим, что $\pi_\alpha(x)=\pi_\alpha(\hat{x})$ тогда и только тогда, когда $x=g\cdot\hat{x}$ для некоторого элемента $g\in G_\alpha$, но это означает, что $\pi(x)=\pi(\hat{x})$, и поэтому отображение φ корректно определено. Аналогично устанавливаем, что φ взаимно однозначно, так как для $x, \hat{x}\in\mathcal{S}_\alpha$ из $\pi(x)=\pi(\hat{x})$ следует, что $x=g\cdot\hat{x}$ для некоторого $g\in G$; ввиду предложения 6.47 $g\in G_\alpha$, и поэтому $\pi_\alpha(x)=\pi_\alpha(\hat{x})$. И наконец, φ — погружение, т. е. ранг $d\varphi$ всюду максимален, так как $d\varphi\circ d\pi_\alpha=d\pi\circ di$, и по предложению 6.47

$$\ker d\pi_\alpha=\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}\cap T\mathcal{S}_\alpha=\ker(d\pi\circ di).$$

Пусть функция $\tilde{H}\colon M/G\to\mathbb{R}$ соответствует G-инвариантной функции $H\colon M\to\mathbb{R}$, так что по теореме 6.42 соответствующие гамильтоновы системы связаны между собой: $\hat{\mathbf{v}}_{\tilde{H}}=d\pi(\hat{\mathbf{v}}_H)$. Мы знаем также, что поле $\hat{\mathbf{v}}_H$ всюду касается множества уровня $\mathcal{S}_\alpha$, и поэтому на $\mathcal{S}_\alpha$ определено редуцированное векторное поле $\tilde{\mathbf{v}}$, для которого $\hat{\mathbf{v}}_H=di(\tilde{\mathbf{v}})$. Кроме того, поскольку группа G является группой симметрий поля $\hat{\mathbf{v}}_H$, группа G_α оказывается остаточной группой симметрий поля $\tilde{\mathbf{v}}$ и на фактормногообразии $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$ определено векторное поле $\mathbf{v}^*=d\pi_\alpha(\tilde{\mathbf{v}})$. Далее, это векторное поле совпадает с ограничением поля $\widehat{\mathbf{v}}_{\widetilde{H}}$ на подмногообразии $\varphi(\mathcal{P}_\alpha/G_\alpha)$, так как на этом подмногообразии

$$d\varphi(\mathbf{v}^*) = d\varphi \circ d\pi_\alpha(\widetilde{\mathbf{v}}) = d\pi \circ di(\widetilde{\mathbf{v}}) = d\pi(\widehat{\mathbf{v}}_H) = \widehat{\mathbf{v}}_{\widetilde{H}}.$$

Это последнее утверждение доказывает, что *любое* гамильтоново векторное поле на M/G всюду касается подмногообразия $\varphi(\mathcal{P}_\alpha/G_\alpha)$. Из предложения 6.19 вытекает теперь, что φ превращает $\mathcal{P}_\alpha/G_\alpha$ в пуассоново подмногообразие многообразия M/G и, кроме того, что ограничение гамильтонова векторного поля $\widehat{\mathbf{v}}_{\widetilde{H}}$ на M/G на подмногообразие $\mathcal{P}_\alpha/G_\alpha$ (т. е. поле $\mathbf{v}^*$) является гамильтоновым относительно индуцированной пуассоновой структуры. Тем самым завершается доказательство теоремы и, следовательно, процедура редукции. □

Если многообразие M симплектическое, то M/G не обязательно будет симплектическим. Можно, однако, показать, что подмногообразия $\mathcal{P}_\alpha/G_\alpha$ являются слоями симплектического слоения многообразия M/G! (См. упр. 6.14.)

Пример 6.49. Рассмотрим на $\mathbb{R}^6$ с каноническими координатами $(p, q) = (p^1, p^2, p^3, q^1, q^2, q^3)$ действие абелевой гамильтоновой группы симметрий G, порожденной функциями $P = p^3$, $Q = q^1p^2 - q^2p^1$. Соответствующие гамильтоновы векторные поля

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial q^3} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_2 = p^1\frac{\partial}{\partial p^2} - p^2\frac{\partial}{\partial p^1} + q^1\frac{\partial}{\partial q^2} - q^2\frac{\partial}{\partial q^1}$$

порождают двупараметрическую абелеву группу преобразований. Группа G будет группой симметрий любого гамильтониана вида $H(\rho, \sigma, \gamma, \zeta, t)$, где $\rho = \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2}$, $\sigma = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}$, $\gamma = q^1p^2 - q^2p^1$, $\zeta = p^3$; в частности, такой вид имеет функция $H = (1/2)|p|^2 + V(\rho)$, цилиндрически симметричный потенциал энергии.

С помощью метода из предложения 6.48 мы можем понизить порядок такой гамильтоновой системы на четыре единицы (и если H не зависит от t, решить всю систему в квадратурах). Ограничим сначала систему на поверхность уровня $\mathcal{P} = \{P = \zeta,\ Q = \gamma\}$ для постоянных ζ, γ. Выразив q и p в цилиндрических координатах

$$q = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z), \quad p = (\sigma\cos\psi,\ \sigma\sin\psi,\ \zeta),$$

получим

$$\gamma = \rho\sigma\sin(\psi - \theta) = \rho\sigma\sin\varphi,$$

где $\varphi = \psi - \theta$. После ограничения на $\mathcal{S}$ гамильтонова система принимает в переменных[1]) ρ, θ, φ, z вид

$$\rho_t = \cos\varphi \cdot H_\sigma, \quad \varphi_t = \sin\varphi(\sigma^{-1}H_\rho - \rho^{-1}H_\sigma), \tag{6.40a}$$

$$\theta_t = \rho^{-1}\sin\varphi H_\sigma + H_\gamma, \quad z_t = H_\zeta, \tag{6.40b}$$

где индексы при H обозначают взятие частных производных. Переменные выбраны таким образом, что на поверхности $\mathcal{S}$ $\mathbf{v}_1 = \partial_z$, $\mathbf{v}_2 = \partial_\theta$. По теореме 6.48 равенства (6.40) инвариантны относительно редуцированной группы симметрий поверхности $\mathcal{S}$, совпадающей ввиду коммутативности группы G с самой этой группой. Проявляется это в том, что ни z, ни θ не появляются явно в правых частях равенств (6.40). Таким образом, если мы нашли решение $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ первых двух уравнений, функции $\theta(t)$ и $z(t)$ определяются посредством квадратур.

Кроме того, теорема 6.48 утверждает, что уравнения (6.40а) сами образуют гамильтонову систему. Зафиксировав γ и ζ, рассмотрим редуцированный гамильтониан

$$\hat{H}(\rho, \varphi, t) = H(\rho, \gamma/(\rho\sin\varphi), \gamma, \zeta, t).$$

Заметим, что

$$\{\rho, \varphi\} = -\gamma\rho^{-1}\sigma^{-2} = -\gamma^{-1}\rho\sin^2\varphi.$$

Простые вычисления, использующие цепное правило, показывают, что система (6.40а) совпадает с системой

$$\rho_t = -\gamma^{-1}\rho\sin^2\varphi\hat{H}_\varphi, \quad \varphi_t = \gamma^{-1}\rho\sin^2\varphi\hat{H}_\rho, \tag{6.41}$$

которая, конечно, гамильтонова. В частности, если функция H (и, таким образом, $\hat{H}$) не зависит от t, мы можем в принципе проинтегрировать систему (6.41) в квадратурах и решить тем самым исходную систему. (На практике, однако, даже для простых функций H необходимые алгебраические преобразования могут оказаться чересчур сложными.)

В общем случае, когда гамильтонова система инвариантна относительно некоторой r-параметрической *абелевой* гамильтоновой группы симметрий, ее порядок можно понизить на $2r$ единиц. Это объясняется тем, что остаточная группа симметрий благодаря тривиальности присоединенного действия совпадает со всей этой абелевой группой. Гамильтонова система порядка $2n$ с n-параметрической абелевой гамильтоновой группой симметрий, или, что то же самое, обладающая n первыми интегра-

[1]) Конечно, эти локальные координаты не универсальны; при $\rho = 0$ нам придется использовать несколько иные переменные.

лами $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, находящимися *в инволюции*:

$$\{P_i, P_j\} = 0 \text{ для всех } i, j,$$

называется *вполне интегрируемой* гамильтоновой системой, так как ее решения можно найти в принципе посредством одних квадратур. На самом деле про такие вполне интегрируемые гамильтоновы системы можно сказать гораздо больше, и эта тема составляет важную главу классической гамильтоновой механики.

Пример 6.50. Рассмотрим группу одновременных вращений $(p, q) \mapsto (Rp, Rq)$, $R \in SO(3)$, действующую на $\mathbb{R}^6$. В примере 6.43 было показано, что это гамильтоново действие, порожденное компонентами вектора момента количества движения $\omega = q \times p$. Любой гамильтониан вида $H(|p|, |q|, p \cdot q)$ инвариантен относительно одновременных вращений и поэтому порождает гамильтонову систему с гамильтоновой группой симметрий $SO(3)$. На подмножестве $M = \{(p, q)\colon q \times p \neq 0\}$ группа $SO(3)$ действует регулярно, ее орбиты трехмерны. Согласно теореме 6.48, мы можем понизить размерность любой такой гамильтоновой системы на четыре единицы; три единицы даются ограничением на общую поверхность уровня $\mathcal{S}_\omega = \{q \times p = \omega\}$, а еще одна — остаточной группой симметрий $G_\omega \simeq SO(2)$ вращений относительно оси ω.

Прежде чем приступить к редукции, будет полезно сделать небольшое наблюдение. Из эквивариантности отображения момента $P\colon \mathbb{R}^6 \to \mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$, $P(p, q) = q \times p = \omega$ следует, что элемент $R \in SO(3)$ отображает поверхность уровня $\mathcal{S}_\omega$ в поверхность уровня $R \cdot \mathcal{S}_\omega = \mathcal{S}_{R\omega}$. Таким образом, мы можем выбрать элемент R так, чтобы вектор $\omega = (0, 0, \omega)$, $\omega > 0$ смотрел в положительном направлении оси z. Все остальные решения, исключая те из них, которые соответствуют нулевому моменту количества движения и которые следует изучать отдельно, можно получить подходящим вращением выбранных решений. Для вектора ω такого вида точки p и q должны лежать на плоскости xy. Будем задавать точку q полярными координатами (ρ, θ), а точку p — полярными координатами (σ, ψ) (как в предыдущем примере). Выбрав три из введенных переменных за локальные координаты на $\mathcal{S}_\omega$ (игнорируя особые точки), получим редуцированную систему в виде

$$\rho_t = \cos\varphi H_\sigma + \rho H_\tau, \quad \sigma_t = -\cos\varphi H_\rho - \sigma H_\tau, \quad \theta_t = \rho^{-1} \sin\varphi H_\sigma. \tag{6.42}$$

Через φ обозначен угол между q и p, т. е. $\omega = \rho\sigma \sin\varphi$ и $\tau = p \cdot q = \rho\sigma\cos\varphi$; нижние индексы при H обозначают частные производные. Остаточная группа симметрий — вращений относительно оси z — порождена векторным полем

$$\mathbf{v} = -q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial}{\partial q^2} - p^2 \frac{\partial}{\partial p^1} + p^1 \frac{\partial}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

она проявляется в том, что правая часть уравнений (6.42) не зависит от θ. Таким образом, мы можем определить функцию $\theta(t)$ посредством единственной квадратуры окончательно редуцированной системы

$$\rho_t = \cos\varphi \cdot \hat{H}_\sigma, \quad \sigma_t = -\cos\varphi \cdot \hat{H}_\rho, \tag{6.43}$$

являющейся гамильтоновой с гамильтонианом

$$\hat{H}(\rho, \sigma) = H(\rho, \sigma, \rho\sigma\cos\varphi), \text{ где } \omega^2 = \rho\sigma\sin\varphi.$$

Проверку того, что подходящая скобка Пуассона записывается формулой

$$\{\hat{F}, \hat{H}\} = \cos\varphi \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \rho} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \rho} \right),$$

мы оставляем читателю. В частности, если функция $\hat{H}$ не зависит от t, уравнения (6.43) можно проинтегрировать в квадратурах и получить полное решение исходной системы. Читатель может проверить, что данная процедура более или менее эквивалентна интегрированию задачи Кеплера в примере 4.19.

ЗАМЕЧАНИЯ

Гамильтонова механика и тесно связанное с ней понятие скобки Пуассона берут начало в оригинальных исследованиях Пуассона, Гамильтона, Остроградского и Лиувилля девятнадцатого века; детали исторического развития классической теории, опиравшейся исключительно на канонические координаты (p, q) симплектической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$, можно найти в книге Whittaker [1, с. 294]. Помимо этого классического труда хорошие описания общего подхода к гамильтоновой механике в симплектическом преломлении содержатся в работах Abraham, Marsden [1], Арнольд [3], Goldstein [1].

Более общее понятие пуассоновой структуры впервые появляется в теории Ли «функциональных групп» и интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка; относительно этой теории см. Lie [4; v. 2, ch. 8], Forsyth [1; v. 5, § 137], Carathéodory [1; ch. 9]. Уже Ли доказал общую теорему Дарбу 6.22 для пуассоновой структуры постоянного ранга. Он назвал отмеченные функции «ausgezeichnete functionen», что Форсайт переводит как «ука-