дого тела в $\mathbb{R}^3$ и задача Кеплера, известны с давних пор, однако происхождение цепочки Тоды из упр. 6.11 относительно недавнее. Манаков [1] показал полную интегрируемость движения твердого тела в $\mathbb{R}^n$. Обобщение понятия вполне интегрируемой системы на системы, интегралы которых не находятся в инволюции, как в упр. 6.12, было изложено в доступной форме в последние годы Мищенко и Фоменко [1] и Козловым [1].

## УПРАЖНЕНИЯ

**6.1.** Предположим, что функция $P(x, t)$ является первым интегралом не зависящей от времени гамильтоновой системы. Докажите, что ее производные $\partial P/\partial t$, $\partial^2 P/\partial t^2$ и т. д. также являются первыми интегралами. (Whittaker [1, с. 434].)

**6.2.** Пусть $\dot{x} = J\nabla H(x)$ — не зависящая от времени гамильтонова система. И пусть $\widehat{\mathbf{v}}_P$ — ее гамильтонова симметрия, соответствующая не зависящей от времени функции $P(x)$. Докажите, что для любого решения $x(t)$ этой системы $P(x(t)) = at + b$ является линейной функцией от $t$. Как это согласуется с теоремой 6.33? Докажите, что если у гамильтоновой системы есть неподвижная точка $x_0$, то $a = 0$ и $P$ на самом деле является первым интегралом.

**6.3.** Пусть $\widehat{\mathbf{v}}_P$ — гамильтонова симметрия гамильтоновой системы $\dot{x} = J\nabla H$, и пусть $f(s)$ — произвольная вещественнозначная функция вещественной переменной $s$. Докажите, что векторное поле $f(P(x))\widehat{\mathbf{v}}_P$ тоже является гамильтоновой симметрией, и найдите соответствующий первый интеграл.

**6.4.** Пусть $M$ — пуассоново многообразие постоянного ранга. Докажите, что функция $C\colon M \to \mathbb{R}$ является отмеченной тогда и только тогда, когда она постоянна на слоях симплектического слоения многообразия $M$. Обобщается ли это утверждение на случай непостоянного ранга? (Weinstein [3].)

**6.5.** Исследуйте скобку Ли — Пуассона и коприсоединенные орбиты для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

**6.6.** Вычислите скобку Ли — Пуассона для групп евклидовых движений $\mathrm{E}(2)$ и $\mathrm{E}(3)$. Как выглядит эта скобка при ограничении на коприсоединенную орбиту?

**6.7.** Пусть структурные функции $J^{ij}(x)$ скобки Пуассона $\{F, H\}$ на $\mathbb{R}^m$ линейно зависят от точки $x \in \mathbb{R}^m$. Докажите, что эта скобка определяет структуру Ли — Пуассона на $\mathbb{R}^m$.

**6.8.** Решите гамильтонову систему, соответствующую гамильтониану $H(p, \tilde{p}, q, \tilde{q}) = (1/2)\tilde{p}^2 + (1/2)\tilde{q}^{-2}(p^2 - 1)$ на $\mathbb{R}^4$ с канонической скобкой Пуассона (Whittaker [1, с. 402].)

**6.9.** Для консервативной механической системы исследуйте процесс выбора координат, в которых фиксирован центр масс и момент количества движения системы, в свете нашей общей процедуры редукции группы.

***6.10.** Движение $n$ одинаковых точечных вихрей на плоскости описывается канонической гамильтоновой системой на $M = \mathbb{R}^{2n}$, отвечающей гамильтониану

$$H(p, q) = \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j \log[(p^i - p^j)^2 + (q^i - q^j)^2],$$

где $(p^i, q^i)$ — плоские координаты $i$-го вихря, а $\gamma_i$ — его напряженность. Докажите, что евклидова группа $\mathrm{E}(2)$ одновременных сдвигов и вращений вихрей является группой симметрий этой системы. Докажите, что каждая инфинитезимальная образующая этой группы является гамильтоновым векторным полем, и определите соответствующую ей сохраняющуюся величину. Докажите, что вся группа E(2) *не* является, однако, гамильтоновой группой симметрий в строгом смысле определения 6.41. Для каких значений $n$ задача о вихрях вполне интегрируема? (Козлов [1; с. 15].)

**6.11.** *Цепочка Тоды* из трех частиц описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 + y^1 + y^2 + y^3, \quad p, q \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$y^1 = e^{q^1-q^2}, \quad y^2 = e^{q^2-q^3}, \quad y^3 = e^{q^3-q^1}$$

и на $\mathbb{R}^6$ используется каноническая пуассонова структура. Докажите, что функции

$$P(p, q) = p^1 + p^2 + p^3, \quad Q(p, q) = p^1p^2p^3 - p^1y^2 - p^2y^3 - p^3y^1$$

являются первыми интегралами, и поэтому цепочка Тоды — вполне интегрируемая гамильтонова система. Можно ли ее проинтегрировать явно? (Toda [1; § 2.10].)

**6.12.** Предположим, что гамильтонова система на некотором $2n$-мерном симплектическом многообразии инвариантна относительно $n$-параметрической разрешимой группы гамильтоновых преобразований. Докажите, что если при заданных начальных условиях все $n$ интегралов *обращаются в нуль*, то соответствующее решение можно (в принципе) найти в квадратурах (обобщение примера 6.40). (Мищенко, Фоменко [1], Козлов [1].)

**6.13.** Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$ с канонической пуассоновой структурой. Обсудите применение теоремы редукции 6.48 к группе симметрий $\mathfrak{so}(2)$, действие которой порождено энергией гармонического осциллятора $H(p, q) = (1/2)(|p|^2+|q|^2)$. (Арнольд (3, с. 341]).

***6.14.** Пусть $G$ и $M$ удовлетворяют условиям теоремы 6.48. Докажите, что если $M$ — симплектическое многообразие, то фактормногообразие $\mathcal{S}_\alpha/G_\alpha$ также является симплектическим. (Marsden, Weinstein [1].)

**6.15.** Гамильтоновой системе в канонической форме

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{\partial p^i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad H = H(t, p, q)$$

соответствует уравнение Гамильтона — Якоби с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, \frac{\partial u}{\partial x}, x\right) = 0.$$

Докажите, что векторное поле $\mathbf{v} = A(t, x, \partial u/\partial x)\partial_u$ тогда и только тогда является обобщенной симметрией уравнения Гамильтона — Якоби, когда функции $A(t, q, p)$ является первым интегралом уравнений Гамильтона. (Fokas [1].)

**6.16.** Рассмотрим функционал $\mathscr{L}[u]=\int L(t, u^{(n)})\,dt$, зависящий от $t\in\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{R}$. Определим замену переменных формулами

$$q_1=u,\quad q^2=u_t,\ \ldots,\quad q^n=u_{n-1}=d^{n-1}u/dt^{n-1},$$

$$p^1=\frac{\partial L}{\partial u_t}-D_t\frac{\partial L}{\partial u_{tt}}+\ldots+(-D_t)^{n-1}\frac{\partial L}{\partial u_n},$$

$$p^2=\frac{\partial L}{\partial u_{tt}}-D_t\frac{\partial L}{\partial u_{ttt}}+\ldots+(-D_t)^{n-2}\frac{\partial L}{\partial u_n},$$

$$\vdots\ \ldots\ldots$$

$$p^n=\frac{\partial L}{\partial u_n}.$$

Пусть, наконец,

$$H(p, q)=-L+p^1q^2+p^2q^3+\ldots+p^{n-1}q^n+p^nu_n,$$

где $u_n=d^nu/dt^n$ определяется из выражения для $p^n$. Докажите, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа для функционала $\mathscr{L}$, если и только если пара $(p(t), q(t))$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона для гамильтониана $H$ относительно канонической скобки Пуассона. (Whittaker [1, с. 297].)

***6.17.** *Интегральные инварианты.* Пусть $M$ — пуассоново многообразие, а $\hat{\mathbf{v}}_H$ — гамильтоново векторное поле на $M$. Для любого подмножества $S\subset M$, предполагая, что гамильтонов поток $\exp(t\hat{\mathbf{v}}_H)$ за время $t$ определен всюду на $S$, положим $S(t)=\{\exp(t\hat{\mathbf{v}}_H)x\colon x\in S\}$. Дифференциальная $k$-форма $\omega$ на $M$ называется (абсолютным) *интегральным инвариантом* гамильтоновой системы, определяемой полем $\hat{\mathbf{v}}_H$, если $\int\limits_{S(t)}\omega=\int\limits_S\omega$ для всех компактных $k$-мерных подмногообразий $S\subset M$ (с границей).

(a) Докажите, что $\omega$ является интегральным инвариантом, если и только если $\hat{\mathbf{v}}_H(\omega)=0$ на всем $M$.

(b) Докажите, что для любого первого интеграла $F(x)$ гамильтоновой системы 1-форма $dF$ является абсолютным интегральным инвариантом. Верно ли обратное?

(c) Пусть $M$ — симплектическое многообразие, а матрица $K(x)=J^{-1}(x)$, выраженная в локальных координатах $x$, — та же, что в предложении 6.15. Докажите, что дифференциальная 2-форма

$$\Omega=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}K_{ij}(x)\,dx^i\wedge dx^j$$

не зависит от выбора локальных координат и является интегральным инвариантом *любой* гамильтоновой системы с данной пуассоновой структурой.

(d) Обратно, докажите, что 2-форма $\Omega$ на $M$ определяет симплектическую пуассонову структуру, если и только если она замкнута: $d\Omega=0$, и имеет максимальный ранг.

(e) Докажите, что если $\omega$ и $\zeta$ — абсолютные интегральные инварианты поля $\hat{\mathbf{v}}_H$, то это же верно и для формы $\omega\wedge\zeta$.

(f) Докажите *теорему Лиувилля*: всякая гамильтонова система на $\mathbb{R}^{2n}$ с канонической скобкой Пуассона (6.1) сохраняет объем:

$$\mathrm{Vol}(S(t)) = \mathrm{Vol}(S), \quad S \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

(См. упр. 1.36.) (Картан [1], Арнольд [3].)

**6.18.** Рассмотрим на пуассоновом многообразии $M$ гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_H$.

(a) Докажите, что если $k$-форма $\omega$ является интегральным инвариантом и поле $\mathbf{w}$ порождает группу снмметрий, то $(k-1)$-форма $\mathbf{w} \rfloor \omega$ является интегральным инвариантом. Покажите также, что производная Ли $\mathbf{w}(\omega)$ будет интегральным инвариантом.

(b) Докажите, что если многообразие $M$ симплектическое, то любая гамильтоноаа система с двумя *не*гамильтоновымн симметриями имеет первый интеграл. Что можно сказать про гамильтоновы симметрии? (Розенкранц [1].)

***6.19.** Рассмотрим гладкое многообразне $N$ и его кокасательное расслоение $M = T^*N$. На $M = T^*N$ имеется естественная симплектическая структура, которую можно описать одним из следующих эквивалентных способов.

(a) Введем на $N$ локальные координаты $q = (q^1, \ldots, q^n)$. Тогда кокасательное пространство $T^*N|_q$ порождено базисными 1-формамн $dq^1, \ldots, dq^n$ и любой элемент $\omega \in T^*N|_q$ можно записать в виде $\omega = \sum p^i\, dq^i$; поэтому $(q, p)$ определяют локальные коорднааты на $T^*N$. Положим

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Докажите, что $\{\ ,\ \}$ задает скобку Пуассона, корректно определенную на всем $T^*N$.

(b) Пусть $\pi\colon T^*N \to N$ — проекция. Каноннческая 1-форма $\theta$ на $M = T^*N$ определяется так, что для любого касательного вектора $\mathbf{v} \in TM|_\omega$ в точке $\omega \in M = T^*N$

$$\langle\theta, \mathbf{v}\rangle = \langle\omega, d\pi(\mathbf{v})\rangle.$$

Докажите, что в локальных координатах, введенных в ч. (a) задачи, $\theta = \sum p^i\, dq^i$. Таким образом, ее внешнний дифференциал $\Omega = d\theta$ определяет, как в упр. 6.17 (c), скобку Пуассона на $T^*M$.

(c) Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на $N$ с потоком $\exp(\varepsilon\mathbf{v})\colon N \to N$. Докажнте, что $\exp(\varepsilon\mathbf{v})^*(x, \omega)$ для $(x, \omega) \in T^*N$ определяет некоторый поток на $M = T^*N$. Какова его инфинитезимальная образующая? Докажите, что для любой функции $H\colon T^*N \to \mathbb{R}$ существует единственное векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_H$ на $M = T^*N$, такое, что

$$\hat{\mathbf{v}}_H(\langle\omega, \mathbf{v}\rangle|_x) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} H[\exp(\varepsilon\mathbf{v})^*(x, \omega)]$$

для всех точек $(x, \omega) \in T^*N$ и любого векторного поля $\mathbf{v}$ на $N$; докажите, что это векторное поле является гамильтоновым векторным полем для функции $H$ относительно введенной выше гамильтоновой структуры.

***6.20.** *Мультивекторы.* Объекты, двойствеиные к дифференциальным формам на многообразии, называются *мультивекторами* и определяются как кососимметрнческие $k$-линейные вещественнозначные отображения кокасательного пространства $T^*M|_x$, гладко зависящие от точки $x$.

(a) Докажите, что «один-векторы» (т. е. $k = 1$) совпадают с векторными полями.

(b) Докажите, что в локальных координатах $k$-вектор имеет вид

$$\theta = \sum_{I} h_I(x)\, \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_k},$$

где суммирование производится по всем строго возрастающим мультииндексам $I$; поля $\partial_i = \partial/\partial x_i$ образуют базис касательного пространства $TM|_x$, функции $h_I$ гладко зависят от $x$.

(c) Пусть $J(x)$ — структурная матрица для скобки Пуассона на $M$. Докажите, что

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{m} J^{ij}(x)\, \partial_i \wedge \partial_j$$

определяет два-вектор, такой, что для любой пары вещественнозначных функций $H$, $F$

$$\langle \Theta;\ dH,\ dF \rangle = \{H,\ F\}. \qquad (*)$$

(d) Докажите, что для $k$-вектора $\theta$ и $l$-вектора $\zeta$ существует однозначно определенный $(k+l-1)$-вектор $[\theta, \zeta]$, называемый *скобкой Схоутена* векторов $\theta$ и $\zeta$ и обладающий свойствами: $[\cdot, \cdot]$ билинейна, кососимметрична, т. е. $[\theta, \zeta] = (-1)^{kl}[\zeta, \theta]$, удовлетворяет правилу Лейбница

$$[\theta,\ \zeta \wedge \eta] = [\theta,\ \zeta] \wedge \eta + (-1)^{kl+l}\, \zeta \wedge [\theta,\ \eta]$$

и в случае обычных векторных полей (один-векторов) $\theta$ и $\zeta$ совпадает с обычной скобкой Ли. Что является аналогом тождества Якоби для скобки Схоутена?

(e) Докажите, что скобка двух функций $H$ и $F$, определенная равенством $(*)$ для два-вектора $\Theta$, билинейна и кососимметрична; она удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда три-вектор $[\Theta, \Theta]$, полученный взятием скобки $\Theta$ с самим собой, тождественно обращается в нуль:

$$[\Theta,\ \Theta] \equiv 0. \qquad (**)$$

Таким образом, задание пуассоновой структуры на многообразии $M$ эквивалентно выбору бивектора, удовлетворяющего тождеству $(**)$. (Lichnerowicz [1], [2].)