производные. Остаточная группа симметрий — вращений относительно оси z — порождена векторным полем

$$\mathbf{v} = -q^2\frac{\partial}{\partial q^1} + q^1\frac{\partial}{\partial q^2} - p^2\frac{\partial}{\partial p^1} + p^1\frac{\partial}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

она проявляется в том, что правая часть уравнений (6.42) не зависит от θ. Таким образом, мы можем определить функцию $\theta(t)$ посредством единственной квадратуры окончательно редуцированной системы

$$\rho_t = \cos\varphi\cdot\hat{H}_\sigma,\quad \sigma_t = -\cos\varphi\cdot\hat{H}_\rho, \tag{6.43}$$

являющейся гамильтоновой с гамильтонианом

$$\hat{H}(\rho,\ \sigma) = H(\rho,\ \sigma,\ \rho\sigma\cos\varphi),\ \text{где}\ \omega^2 = \rho\sigma\sin\varphi.$$

Проверку того, что подходящая скобка Пуассона записывается формулой

$$\{\hat{F},\ \hat{H}\} = \cos\varphi\left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial\rho}\frac{\partial\hat{H}}{\partial\sigma} - \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma}\frac{\partial\hat{H}}{\partial\rho}\right),$$

мы оставляем читателю. В частности, если функция $\hat{H}$ не зависит от t, уравнения (6.43) можно проинтегрировать в квадратурах и получить полное решение исходной системы. Читатель может проверить, что данная процедура более или менее эквивалентна интегрированию задачи Кеплера в примере 4.19.

ЗАМЕЧАНИЯ

Гамильтонова механика и тесно связанное с ней понятие скобки Пуассона берут начало в оригинальных исследованиях Пуассона, Гамильтона, Остроградского и Лиувилля девятнадцатого века; детали исторического развития классической теории, опиравшейся исключительно на канонические координаты (p, q) симплектической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$, можно найти в книге Whittaker [1, с. 294]. Помимо этого классического труда хорошие описания общего подхода к гамильтоновой механике в симплектическом преломлении содержатся в работах Abraham, Marsden [1], Арнольд [3], Goldstein [1].

Более общее понятие пуассоновой структуры впервые появляется в теории Ли «функциональных групп» и интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка; относительно этой теории см. Lie [4; v. 2, ch. 8], Forsyth [1; v. 5, § 137], Carathéodory [1; ch. 9]. Уже Ли доказал общую теорему Дарбу 6.22 для пуассоновой структуры постоянного ранга. Он назвал отмеченные функции «ausgezeichnete functionen», что Форсайт переводит как «указующие функции». В этой книге я предпочел перевод термина Ли, принадлежащий Каратеодори. Недавно Вейнстейн (Weinstein [3]) предложил менее исторически обоснованное название «функция Казимира» для этих объектов, и оно приобрело наибольшую популярность. Теория Ли была в целом забыта как математиками, так и физиками. Пуассоновы структуры были введены снова более или менее независимо в работах Dirac [1], Jost [1], Sudarshan, Mukunda [1] и, в современном виде, в статьях Lichnerowicz [1], [2], Marsden, Weinstein [2**] и Weinstein [3]. Благодаря работам Marsden, Weinstein [2], Conn [1] и другим они приобретали все более важное значение как в математической физике, так и в дифференциальной геометрии.

Ли был также хорошо осведомлен о скобке Пуассона на двойственном пространстве к алгебре Ли и ее связях с коприсоединенным представлением. Явную формулу для скобки Ли — Пуассона можно найти в книге Lie [4; v. 2, p. 294]. Эта скобка тоже была забыта вплоть до 60-х годов нашего столетия, когда ее переоткрыл Березин [1] и использовали Кириллов [1], Костант (Kostant [1]) и Сурьо (Souriau [1]) в связи с теорией представлений и геометрическим квантованием. В дальнейшем эта скобка носила имя одного или нескольких из указанных авторов, пока Вейнстейн (Weinstein [2]) не указал на ее гораздо более раннее появление в работе Ли, предложив название «скобка Ли — Пуассона». Связь между движением твердого тела и скобкой Ли — Пуассона на SO(3) установил Арнольд [2]. О классическом толковании этих уравнений см. Whittaker [1; § 69], Goldstein [1; ch. 4], а более детальное изложение в духе настоящей главы можно найти в книге Holmes, Marsden [1]. О приложениях к теории устойчивости см. Weinstein [4].

Понижение порядка гамильтоновой системы с симметрией имеет долгую историю, и бо́льшую часть технических приемов, включая якобиево «исключение узлов», в их классическом виде можно найти в книге Whittaker [1]. Современный подход к этой теории берет свое начало в статье Смейла Smale [1], в которой введен современный вариант отображения момента. Дальнейшие продвижения в работах Souriau [1] и Meyer [1] привели к полностью разработанному подходу к процедуре редукции, развитому Марсденом и Вейнстейном в книге Marsden, Weinstein [1]. Подход настоящей главы представляет собой слегка упрощенный и слегка менее общий вариант теории Марсдена — Вейнстейна. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, которых мы лишь коснулись, на протяжении всей истории классической механики были предметом огромной важности. Бо́льшая часть этих примеров, таких, как движение твердого тела в $\mathbb{R}^3$ и задача Кеплера, известны с давних пор, однако происхождение цепочки Тоды из упр. 6.11 относительно недавнее. Манаков [1] показал полную интегрируемость движения твердого тела в $\mathbb{R}^n$. Обобщение понятия вполне интегрируемой системы на системы, интегралы которых не находятся в инволюции, как в упр. 6.12, было изложено в доступной форме в последние годы Мищенко и Фоменко [1] и Козловым [1].

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Предположим, что функция $P(x, t)$ является первым интегралом не зависящей от времени гамильтоновой системы. Докажите, что ее производные $\partial P/\partial t$, $\partial^2 P/\partial t^2$ и т. д. также являются первыми интегралами. (Whittaker [1, с. 434].)

6.2. Пусть $\dot{x} = J\nabla H(x)$ — не зависящая от времени гамильтонова система. И пусть $\widehat{\mathbf{v}}_P$ — ее гамильтонова симметрия, соответствующая не зависящей от времени функции $P(x)$. Докажите, что для любого решения $x(t)$ этой системы $P(x(t)) = at + b$ является линейной функцией от t. Как это согласуется с теоремой 6.33? Докажите, что если у гамильтоновой системы есть неподвижная точка x_0, то $a = 0$ и P на самом деле является первым интегралом.

6.3. Пусть $\widehat{\mathbf{v}}_P$ — гамильтонова симметрия гамильтоновой системы $\dot{x} = J\nabla H$, и пусть $f(s)$ — произвольная вещественнозначная функция вещественной переменной s. Докажите, что векторное поле $f(P(x))\widehat{\mathbf{v}}_P$ тоже является гамильтоновой симметрией, и найдите соответствующий первый интеграл.

6.4. Пусть M — пуассоново многообразие постоянного ранга. Докажите, что функция $C\colon M \to \mathbb{R}$ является отмеченной тогда и только тогда, когда она постоянна на слоях симплектического слоения многообразия M. Обобщается ли это утверждение на случай непостоянного ранга? (Weinstein [3].)

6.5. Исследуйте скобку Ли — Пуассона и коприсоединенные орбиты для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

6.6. Вычислите скобку Ли — Пуассона для групп евклидовых движений $\mathrm{E}(2)$ и $\mathrm{E}(3)$. Как выглядит эта скобка при ограничении на коприсоединенную орбиту?

6.7. Пусть структурные функции $J^{ij}(x)$ скобки Пуассона $\{F, H\}$ на $\mathbb{R}^m$ линейно зависят от точки $x \in \mathbb{R}^m$. Докажите, что эта скобка определяет структуру Ли — Пуассона на $\mathbb{R}^m$.

6.8. Решите гамильтонову систему, соответствующую гамильтониану $H(p, \tilde{p}, q, \tilde{q}) = (1/2)\tilde{p}^2 + (1/2)\tilde{q}^{-2}(p^2 - 1)$ на $\mathbb{R}^4$ с канонической скобкой Пуассона (Whittaker [1, с. 402].)

6.9. Для консервативной механической системы исследуйте процесс выбора координат, в которых фиксирован центр масс и момент количества движения системы, в свете нашей общей процедуры редукции группы.

***6.10.** Движение n одинаковых точечных вихрей на плоскости описывается канонической гамильтоновой системой на $M = \mathbb{R}^{2n}$, отвечающей гамильтониану

$$H(p, q) = \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j \log\left[(p^i - p^j)^2 + (q^i - q^j)^2\right],$$

где (p^i, q^i) — плоские координаты i-го вихря, а γ_i — его напряженность. Докажите, что евклидова группа $\mathrm{E}(2)$ одновременных сдвигов и вращений вих-