7. Гамильтоновы методы для эволюционных уравнений

Равновесные решения уравнений недиссипативной механики сплошной среды находятся обычно минимизацией подходящего вариационного интеграла. Следовательно, гладкие решения будут удовлетворять уравнениям Эйлера — Лагранжа для соответствующего функционала, и для их нахождения можно применять теоретико-групповые методы лагранжева случая, обсуждавшиеся в гл. 4 и 5. Однако, имея дело с динамической задачей во всей ее полноте, мы встречаемся с системами дифференциальных уравнений, для которых лагранжева точка зрения, если она и возможна, не является ни приемлемой, ни естественной. В этом случае гамильтонов вид системы эволюционных уравнений становится естественной вариационной формулировкой системы.

Исторически, однако, понимание правильной общей формы бесконечномерного обобщения на эволюционные уравнения классического понятия конечномерной гамильтоновой системы пришло лишь недавно. Частично это объясняется чрезмерным значением, придаваемым каноническим координатам, существование которых в конечномерном случае гарантируется теоремой Дарбу, в то время как в эволюционирующих системах их нет. Однако принятый в нашей книге подход, основанный на понятии скобки Пуассона, легко обобщается в этом контексте. Для превращения гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.14) в гамильтонову систему эволюционных уравнений необходимы следующие принципиальные нововведения:

(i) замена гамильтониана $H(x)$ на гамильтонов функционал $\mathscr{H}[u]$,

(ii) замена операции векторного градиента ∇H на вариационную производную $\delta\mathscr{H}$ гамильтонова функционала и

(iii) замена кососимметрической матрицы $J(x)$ антисимметрическим дифференциальным оператором $\mathscr{D}$, который может зависеть от u.

Полученная в результате гамильтонова система будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{D} \cdot \delta\mathscr{H}[u].$$

Дифференциальный оператор $\mathscr{D}$, чтобы быть настоящим гамильтоновым оператором, должен удовлетворять определенным ограничениям, основанным на тождестве Якоби для соответствующей скобки Пуассона. Эти ограничения описаны в § 7.1; в своем исходном виде они представляются безнадежно непригодными для работы, но с помощью теории «функциональных мультивекторов» выводится простой и эффективный вычислительный алгоритм проверки гамильтоновости оператора $\mathscr{D}$. Во втором параграфе исследуются стандартные приложения групп симметрий и законов сохранения к гамильтоновым системам эволюционных уравнений. При этом основным инструментом становится гамильтонова форма теоремы Нётер. Приведены приложения к уравнению Кортевега — де Фриза и уравнениям Эйлера потока идеальной жидкости.

Последний параграф посвящен современной теории бигамильтоновых систем. Иногда, как в случае уравнения Кортевега — де Фриза, приходится сталкиваться с системами эволюционных уравнений, которые можно записать в гамильтоновом виде двумя различными способами. В этом случае при некоторых слабых условиях совместности система должна иметь бесконечную иерархию попарно коммутирующих законов сохранения и связанных с ними гамильтоновых потоков, порожденных оператором рекурсии, построенным по двум скобкам Пуассона; следовательно, такую систему можно рассматривать как «вполне интегрируемую» гамильтонову систему. У таких систем есть много других замечательных свойств: солитонные решения, линеаризация с помощью обратной задачи рассеяния и т. д. В этом параграфе приведено новое доказательство основной теоремы о бигамильтоновых системах и некоторые их приложения.

7.1. СКОБКИ ПУАССОНА

Напомним сначала основы формального вариационного исчисления, приведенные в § 5.4. Пусть $M \subset X \times U$ — открытое подмножество в пространстве независимых и зависимых переменных $x = (x^1, \ldots, x^p)$ и $u = (u^1, \ldots, u^q)$. Алгебра дифференциальных функций $P(x, u^{(n)}) = P[u]$ на M обозначается через $\mathscr{A}$, а ее факторпространство по образу оператора полной дивергенции является пространством функционалов $\mathscr{P} = \int P\,dx$ и обозначается через $\mathscr{F}$.

Главная цель этого параграфа — уточнить понятие гамильтоновости системы эволюционных уравнений

$$u_t = K[u] = K(x, u^{(n)}), \quad K \in \mathscr{A}^q.$$

Функционал K зависит здесь только от пространственных переменных x и производных функций u по пространственным переменным; переменная t выделена — она играет особую роль. Для достижения поставленной цели нам необходимо найти аналоги различных компонент формулы (6.14) в эволюционном контексте. Во-первых, роль гамильтониана в формуле (6.14) должен исполнять гамильтонов *функционал* $\mathcal{H} = \int H\,dx \in \mathcal{F}$. Поэтому мы должны заменить взятие градиента «функциональным градиентом», или вариационной производной $\delta\mathcal{H} \in \in \mathcal{A}^q$ функционала $\mathcal{H}$. Оставшаяся компонента есть аналог кососимметрической матрицы $J(x)$, с помощью которой определяется скобка Пуассона. Здесь нам нужен линейный оператор $\mathcal{D}\colon \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^q$ на пространстве наборов из q дифференцируемых функций, который в большинстве случаев будет линейным матричным дифференциальным оператором размера $q \times q$ и может зависеть от x, u и производных от u. Рассматривая соответствующую скобку Пуассона, находим дополнительные свойства, которыми должен обладать оператор $\mathcal{D}$, чтобы быть гамильтоновым.

В конечномерном случае скобка Пуассона пары функций — это функция, билинейно зависящая от соответствующих градиентов, коэффициенты которой определяются матрицей Гамильтона $J(x)$, ср. (6.12). Таким образом, для эволюционных уравнений скобка Пуассона двух функционалов должна быть *функционалом*, билинейно зависящим от соответствующих вариационных производных. Ясно, что для возможного гамильтонова оператора $\mathcal{D}$ корректное выражение для соответствующей скобки Пуассона имеет вид

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\} = \int \delta\mathcal{P} \cdot \mathcal{D}\delta\mathcal{Q}\,dx \tag{7.1}$$

для функционалов $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{F}$. Конечно, для того чтобы выражение (7.1) было настоящей скобкой Пуассона, необходимо, чтобы оператор $\mathcal{D}$ удовлетворял некоторым дополнительным ограничениям.

Определение 7.1. Линейный оператор $\mathcal{D}\colon \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^q$ называется *гамильтоновым*, если его скобка Пуассона (7.1) удовлетворяет условию *кососимметричности*

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\} = -\{\mathcal{Q}, \mathcal{P}\} \tag{7.2}$$

и *тождеству Якоби*

$$\{\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}, \mathcal{R}\} + \{\{\mathcal{R}, \mathcal{P}\}, \mathcal{Q}\} + \{\{\mathcal{Q}, \mathcal{R}\}, \mathcal{P}\} = 0 \tag{7.3}$$

для всех функционалов $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \in \mathcal{F}$.

Если мы сравним определение 7.1 с конечномерным определением 6.1, то увидим, что отброшены два условия. Первое из них, билинейность, очевидно в силу вида скобки (7.1). Правило Лейбница не имеет аналога в бесконечномерной ситуации: как мы видели в § 5.4, нельзя корректно определить умножение функционалов. Однако главное применение правила Лейбница состояло в доказательстве существования для вещественнозначной функции H гамильтонова векторного поля, удовлетворяющего условию (6.4). Оно *сохраняется* и в функциональном случае:

Предложение 7.2. *Пусть $\mathcal{D}$ — гамильтонов оператор со скобкой Пуассона* (7.1). *Для каждого функционала $\mathcal{H} = \int H\,dx \in \mathcal{F}$ существует эволюционное векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{H}}$, называемое* гамильтоновым векторным полем, *соответствующим функционалу $\mathcal{H}$, которое удовлетворяет условию*

$$\operatorname{pr}\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} \tag{7.4}$$

для всех функционалов $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$. При этом $\mathcal{D}\delta\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathsf{E}(H)$ является характеристикой поля $\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P} = \int P\,dx$, $P \in \mathcal{A}$. Тогда, интегрируя по частям формулу (5.90), находим

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} = \int \mathsf{E}(P)\cdot\mathcal{D}\mathsf{E}(H)\,dx = \int \operatorname{pr}\mathbf{v}_{\mathcal{D}\mathsf{E}(H)}(P)\,dx =$$
$$= \operatorname{pr}\mathbf{v}_{\mathcal{D}\mathsf{E}(H)}\left(\int P\,dx\right).$$

(См. упр. 5.42.) Положив $\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{H}} = \mathbf{v}_{\mathcal{D}\mathsf{E}(H)}$, получаем (7.4). □

Экспоненцируя соответствующее функционалу $\mathcal{H}[u]$ гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{H}}$, получаем соответствующий гамильтонов поток. Ввиду формулы (5.14) гамильтонова система эволюционных уравнений принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}\cdot\delta\mathcal{H}, \tag{7.5}$$

где δ — вариационная производная, а $\mathcal{D}$ — гамильтонов оператор. Отметим полную аналогию с конечномерной гамильтоновой системой (6.14). Прежде чем перейти к примерам гамильтоновых систем, нам нужно вооружиться разумными методами непосредственной проверки того, что данный оператор $\mathcal{D}$

является гамильтоновым. Для начала можно непосредственно проверить требования, вытекающие из кососимметричности скобки Пуассона — инфинитезимального аналога кососимметричности матрицы J в формуле (6.14).

Предложение 7.3. *Пусть $\mathcal{D}$ — матричный дифференциальный оператор размера $q \times q$ со скобкой* (7.1) *на пространстве функционалов. Скобка кососимметрична, т. е. выполняется условие* (7.2), *тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{D}$ антисимметрический: $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$.*

Доказательство. Для $\mathcal{P} = \int P\,dx$, $\mathcal{Q} = \int Q\,dx$ условие (7.2) можно переписать в виде

$$\int \mathsf{E}(P) \cdot \mathcal{D}\mathsf{E}(Q)\,dx = -\int \mathsf{E}(Q) \cdot \mathcal{D}\mathsf{E}(P)\,dx.$$

Из определения (5.45) сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$ находим, что

$$\int \mathsf{E}(P) \cdot (\mathcal{D} + \mathcal{D}^*)\,\mathsf{E}(Q)\,dx = 0.$$

Если это равенство выполняется для всех P, $Q \in \mathcal{A}$, то, как при доказательстве предложения 5.64 с помощью «принципа подстановки», сформулированного в упр. 5.32, заключаем, что $\mathcal{D} + \mathcal{D}^* = 0$. □

Производные Ли дифференциальных операторов

Прежде чем перейти к анализу тождества Якоби, мы должны дополнить формальное вариационное исчисление, изложенное в § 5.4. Для эволюционного векторного поля $\mathbf{v}_Q$ и дифференциального оператора $\mathcal{D} = \sum P_K[u]\,D_K$, коэффициенты которого могут зависеть от u, мы определяем *производную Ли* оператора $\mathcal{D}$ вдоль поля $\mathbf{v}_Q$ как инфинитезимальное изменение оператора $\mathcal{D}$ под действием однопараметрической группы $\exp(\varepsilon \mathbf{v}_Q)$. Ясно, что производная Ли — это дифференциальный оператор

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathcal{D}) = \sum_K \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P_K)\,D_K, \tag{7.6}$$

получаемый действием поля $\mathbf{v}_Q$ на коэффициенты оператора $\mathcal{D}$. Это определение распространяется и на случай матричных дифференциальных операторов, где теперь $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$ действует на отдельные элементы матрицы.

Например, для оператора $\mathscr{D}=D_x^3+2uD_x+u_x$ и поля $\mathbf{v}_Q=$ $=u_{xx}\partial_u$

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathscr{D})=2\,\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(u)\,D_x+\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(u_x)=2u_{xx}D_x+u_{xxx}.$$

Однопараметрическая группа $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)$ находится в этом случае решением уравнения теплопроводности $u_\varepsilon=u_{xx}$, а $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathscr{D})$ представляет собой инфинитезимальное изменение оператора $\mathscr{D}$ в случае, когда $u(x,\varepsilon)$ — решение уравнения теплопроводности.

Главная формула, которая нам нужна, — это следующий вариант правила Лейбница:

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathscr{D}P)=\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathscr{D})\cdot P+\mathscr{D}[\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P)], \tag{7.7}$$

который выполняется для всех $P\in\mathscr{A}^r$, $Q\in\mathscr{A}^q$ и любого матричного дифференциального оператора $\mathscr{D}\colon\mathscr{A}^r\to\mathscr{A}^s$ размера $s\times r$. Эту формулу можно доказать либо непосредственно из определения, либо вывести из формулы (7.6) с помощью коммутационного соотношения (5.19).

Тождество Якоби

На первый взгляд непосредственная проверка тождества Якоби (7.3) даже для простейших антисимметрических операторов выглядит безнадежно сложной вычислительной задачей. Однако с помощью некоторых наших основных результатов из формального вариационного исчисления достигается значительное упрощение, вводящее эту задачу в пределы выполнимости. Еще больше упрощается она введением одного варианта функциоальных форм из § 5.4 (хотя здесь они и являются, в некотором смысле, двойственными объектами), после чего проверка тождества Якоби становится более или менее стандартным вычислением.

Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{R}$ — функционалы в $\mathscr{A}^q$ с вариационными производными $\delta\mathscr{P}=P$, $\delta\mathscr{Q}=Q$, $\delta\mathscr{R}=R$. (Отметим изменение обозначений: P больше не является подынтегральным выражением для $\mathscr{P}$!) В этих обозначениях первый член тождества Якоби (7.3) принимает вид

$$\{\{\mathscr{P},\mathscr{Q}\},\mathscr{R}\}=\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{R}}\left(\int P\cdot\mathscr{D}Q\,dx\right)=\int\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(P\cdot\mathscr{D}Q)\,dx.$$

С помощью правила Лейбница и тождества (7.7) получаем

$$\{\{\mathscr{P},\mathscr{Q}\},\mathscr{R}\}=\int\{\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(P)\cdot\mathscr{D}Q+P\cdot\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(\mathscr{D})\cdot Q+$$
$$+P\cdot\mathscr{D}[\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(Q)]\}\,dx. \tag{7.8}$$

Согласно формуле (5.41), связывающей производную Ли и производную Фреше, первый член в этом выражении имеет вид

$$\int \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(P)\cdot\mathscr{D}Q\,dx=\int \mathsf{D}_P(\mathscr{D}R)\cdot\mathscr{D}Q\,dx.$$

Ввиду антисимметричности оператора $\mathscr{D}$ третий член имеет аналогичный вид

$$\int P\cdot\mathscr{D}\left[\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(Q)\right]dx=-\int \mathscr{D}P\cdot\mathsf{D}_Q(\mathscr{D}R)\,dx. \tag{7.9}$$

Второй и третий члены тождества Якоби дают аналогичный вклад; например, выражение для $\{\{\mathscr{Q},\mathscr{R}\},\mathscr{P}\}$ содержит члены

$$\int \mathsf{D}_Q(\mathscr{D}P)\cdot\mathscr{D}R\,dx \quad \text{и} \quad -\int \mathscr{D}Q\cdot\mathsf{D}_R(\mathscr{D}P)\,dx. \tag{7.10}$$

Но, согласно теореме 5.68, производная Фреше функционала $Q=\delta\mathscr{Q}$ является симметрическим дифференциальным оператором, поэтому первый из интегралов (7.10) равен

$$\int \mathscr{D}P\cdot\mathsf{D}_Q(\mathscr{D}R)\,dx$$

и при подстановке в тождество Якоби взаимно уничтожается с интегралом (7.9). При таком разложении тождества Якоби шесть членов тем самым взаимно уничтожаются, и мы приходим к его эквивалентной форме

$$\int\left[P\cdot\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(\mathscr{D})\,Q+R\cdot\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}Q}(\mathscr{D})\,P+Q\cdot\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}P}(\mathscr{D})\,R\right]dx=0. \tag{7.11}$$

Левая часть должна обращаться в нуль для всех P, Q, R, являющихся вариационными производными функционалов.

На этом шаге возникает следующее упрощение. Заметим, что подынтегральное выражение в формуле (7.11) зависит только от P, Q, R и их *полных* производных. Согласно общему «принципу подстановки», сформулированному в упр. 5.32, интеграл (7.11) обращается в нуль для всех вариационных производных $P=\delta\mathscr{P}$, $Q=\delta\mathscr{Q}$, $R=\delta\mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда он обращается в нуль для *произвольных* наборов из q функций P, Q, $R\in\mathscr{A}^q$. Таким образом, мы доказали

Предложение 7.4. *Пусть $\mathscr{D}$ — антисимметрический матричный дифференциальный оператор размера $q\times q$. Тогда скобка (7.1) удовлетворяет тождеству Якоби, если и только если равенство (7.11) выполняется для всех наборов из q функций P, Q, $R\in\mathscr{A}^q$.*

Следствие 7.5. *Антисимметрический матричный дифференциальный оператор $\mathscr{D}$ размера $q \times q$, коэффициенты которого не зависят от u и ее производных, автоматически является гамильтоновым.*

Действительно, в этом случае $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathscr{D}) = 0$ для любого эволюционного векторного поля $\mathbf{v}_Q$, поэтому условие (7.11), очевидно, выполняется. □

Пример 7.6. Уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

в действительности можно записать в гамильтоновом виде двумя различными способами. Во-первых, мы видим, что

$$u_t = D_x\left(u_{xx} + \frac{1}{2}u^2\right) = \mathscr{D}\delta\mathscr{H}_1,$$

где $\mathscr{D} = D_x$ и

$$\mathscr{H}_1[u] = \int \left[-\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{6}u^3\right] dx$$

— один из классических законов сохранения. Заметим, что оператор $\mathscr{D}$, конечно, антисимметричен и поэтому ввиду следствия 7.5 автоматически гамильтонов. Скобка Пуассона имеет вид

$$\{\mathscr{P}, \mathscr{Q}\} = \int \delta\mathscr{P} \cdot D_x(\delta\mathscr{Q})\, dx. \tag{7.12}$$

(Чтобы оценить по достоинству действенность формальных вариационных методов, читатель может попробовать проверить тождество Якоби для скобки (7.12) непосредственно!)

Вторая гамильтонова форма несколько менее очевидна. Имеем

$$u_t = \left(D_x^3 + \frac{2}{3}uD_x + \frac{1}{3}u_x\right)u = \mathscr{E}\delta\mathscr{H}_0,$$

где

$$\mathscr{H}_0[u] = \int \frac{1}{2}u^2\, dx$$

— еще одна сохраняемая величина и

$$\mathscr{E} = D_x^3 + \frac{2}{3}uD_x + \frac{1}{3}u_x.$$

Легко проверить, что оператор $\mathscr{E}$ антисимметричен; для доказательства тождества Якоби рассмотрим условие (7.11). Первый член имеет вид

$$\int P \operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathscr{E}(R)}(\mathscr{E})\, Q\, dx = \int P\left[\frac{2}{3}(\mathscr{E}R)Q_x + \frac{1}{3}(\mathscr{E}R)_x Q\right] dx =$$
$$= \int \left[\frac{2}{3} PR_{xxx}Q_x + \frac{1}{3} PR_{xxxx}Q + \frac{4}{9} uPR_xQ_x + \right.$$
$$+ \frac{2}{9} u_xPRQ_x + \frac{2}{9} uPR_{xx}Q + \frac{1}{3} u_xPR_xQ +$$
$$\left. + \frac{1}{9} u_xPRQ\right] dx,$$

где индексом x обозначены для краткости *полные* производные: $P_x = D_xP$, $P_{xx} = D_x^2P$ и т. д. Мы должны добавить соответствующие выражения, происходящие из остальных двух членов формулы (7.11), а затем доказать, что полученное при этом подынтегральное выражение является нулевым лагранжианом, т. е. полной производной D_x, независимо от того, каковы P, Q и R. Это действительно так, и доказательство мы оставляем читателю, поскольку позднее найдем гораздо более простое доказательство этого факта. Мы заключаем, что формула

$$\{\mathscr{P}, \mathscr{Q}\} = \int \left[\delta\mathscr{P} \cdot \left(D_x^3 + \frac{2}{3} uD_x + \frac{1}{3} u_x\right) \delta\mathscr{Q}\right] dx \qquad (7.13)$$

определяет скобку Пуассона на пространстве функционалов.

Хотя приведенное выше вычисление чуть менее трудоемко, чем непосредственная проверка тождества Якоби, но даже и в этом относительно простом случае оно требует значительной вычислительной выносливости. Еще более существенного упрощения можно достичь за счет применения теории полилинейных отображений, аналогичной развитой в § 5.4. (Быть может, ориентированный на приложения читатель захочет здесь перейти непосредственно к началу § 7.2.)

Функциональиые мультивекторы

Мультивекторы в конечномерном случае — это объекты, двойственные дифференциальным формам. В упр. 6.20 было показано, как развивать теорию конечномерных пуассоновых структур, опираясь на теорию мультивекторов. В этом параграфе мы вводим аналогичные объекты для бесконечномерных гамильтоновых систем эволюционных уравнений. Так как мы имеем дело с открытыми подмножествами евклидова пространства $M \subset X \times U$, теория функциональных мультивекторов совпадает с теорией функциональных форм, развитой в § 5.4. Мы используем другую терминологию и обозначения лишь потому, что с более глобальной точки зрения правила преобразования этих объектов при заменах переменных *не* совпадают; функциональные формы преобразуются как выражения Эйлера — Лагранжа, а функциональные мультивекторы больше похожи на эволюционные векторные поля. Помимо этого различия (которое не проявится в этой книге), эти объекты совпадают.

Напомним, что каждая функциональная k-форма определяет кососимметрическое k-линейное отображение пространства T_0 эволюционных векторных полей в пространство $\mathcal{F}$ функционалов. Аналогично, *функциональный k-вектор* задается кососимметрическим k-линейным отображением «двойственного» пространства $\bigwedge_*^1$ *функциональных* 1-форм в $\mathcal{F}$. Так как каждое эволюционное векторное поле однозначно определяется своей характеристикой, мы можем отождествить T_0 с $\mathcal{A}^q$, пространством наборов из q дифференциальных функций на M. Аналогично, в соответствии с предложением 5.63 каждая функциональная 1-форма однозначно определяется своей канонической формой, поэтому мы можем отождествить $\bigwedge_*^1$ с $\mathcal{A}^q$. При этих двух отождествлениях (зависящих от введения евклидовых координат на M) мы получаем отождествление функциональных мультивекторов и форм.

Каждая функциональная форма порождена некоторой вертикальной формой, и соответственно каждый функциональный мультивектор порожден некоторым вертикальным мультивектором. Чтобы сохранить различие в обозначениях этих двух объектов, будем обозначать «один-вектор», соответствующий 1-форме du_J^α, через θ_J^α; таким образом,

$$\langle \theta_J^\alpha;\ P\rangle = D_J P_\alpha \text{ для всех } P = (P_1, \ldots, P_q) \in \mathcal{A}^q$$

(начиная с этого момента, мы заменяем $\bigwedge_*^1$ на $\mathcal{A}^q$). Заметим, что θ_J^α можно отождествить с дифференцированием $\partial/\partial u_J^\alpha$, которое можно считать иным обозначением для мультивекторов, но несколько более громоздким и в дальнейшем вносящим некоторую путаницу. Таким образом, общий функциональный k-вектор представляет собой конечную сумму

$$\Theta = \int \left\{ \sum_{\alpha, \mathrm{J}} R_{\mathrm{J}}^\alpha [u]\, \theta_{J_1}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta_{J_k}^{\alpha_k} \right\} dx$$

с коэффициентами $R_{\mathrm{J}}^\alpha \in \mathcal{A}$; он определяет k-линейное отображение

$$\langle \Theta;\ P^1, \ldots, P^k\rangle = \int \left[\sum_{\alpha, \mathrm{J}} R_{\mathrm{J}}^\alpha \det\left(D_{J_i} P_{\alpha_i}^j\right)\right] dx, \quad P^j \in \mathcal{A}^q,$$

ср. (5.73). Полные производные действуют как производные Ли на вертикальных k-векторах, $D_i(\theta^\alpha_J)=\theta^\alpha_{J,i}$, ср. (5.74). Пространство $\bigwedge^*_k$ функциональных k-векторов является, таким образом, факторпространством пространства *вертикальных k-векторов* (т. е. конечных сумм внешних произведений элементов θ^α_J с коэффициентами из $\mathscr{A}$) по образу полной дивергенции. По лемме 5.61 каждый функциональный k-вектор однозначно определен своими значениями на пространстве наборов из q дифференциальных функций. Таким образом, можно перенести на функциональные мультивекторы все теоремы и примеры функциональных форм из § 5.4, заменив формы du^α_J на их аналоги θ^α_J, а векторные поля $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$ на их характеристики $Q\in\mathscr{A}^q$[1]).

Например, любой функциональный один-вектор

$$\gamma=\int\left\{\sum_{\alpha,J}R^\alpha_J\theta^\alpha_J\right\}dx$$

можно привести к *каноническому виду*

$$\gamma=\int\{R\cdot\theta\}\,dx=\int\left\{\sum_{\alpha=1}^{q}R_\alpha\theta^\alpha\right\}dx,\quad R_\alpha=\sum_J(-D)_J R^\alpha_J$$

путем интегрирования по частям. (Поэтому мы можем отождествить $\bigwedge^*_1$ с T_0, пространством эволюционных векторных полей!) Аналогично, у любого функционального два-вектора есть *канонический вид*

$$\Theta=\frac{1}{2}\int\{\theta\wedge\mathscr{D}\theta\}\,dx=\frac{1}{2}\int\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{q}\theta^\alpha\wedge\mathscr{D}_{\alpha\beta}\theta^\beta\right\}dx,\tag{7.14}$$

где $\mathscr{D}=(\mathscr{D}_{\alpha\beta})$ — антисимметрический матричный дифференциальный оператор размера $q\times q$; см. предложение 5.64. Такой два-вектор определяет билинейное отображение

$$\langle\Theta;\,P,\,Q\rangle=\frac{1}{2}\int(P\mathscr{D}Q-Q\mathscr{D}P)\,dx=\int(P\cdot\mathscr{D}Q)\,dx,\quad P,\,Q\in\mathscr{A}^q,$$

где мы использовали антисимметричность оператора $\mathscr{D}$. В частности, если P и Q — вариационные производные (или, если вер-

---

[1]) В этой теории есть один тонкий момент, состоящий в том, что, хотя пространства $\bigwedge^k_*$ и $\bigwedge^*_k$ функциональных форм и мультивекторов и определяются двойственным образом, между ними *нет* естественной двойственности векторных пространств ни при каких $k>1$! Здесь отражается наша неспособность определить умножение на пространстве $\mathscr{F}$ функционалов.

нуться к $\bigwedge_*^1$, дифференциалы), то соотношение

$$\langle\Theta;\ \delta\mathscr{P},\ \delta\mathscr{Q}\rangle=\int(\delta\mathscr{P}\cdot\mathscr{D}\delta\mathscr{Q})\,dx$$

воспроизводит скобку $\{\mathscr{P},\ \mathscr{Q}\}$, определенную антисимметрическим оператором $\mathscr{D}$. Например, скобка Пуассона, задаваемая вторым гамильтоновым оператором $\mathscr{E}$ для уравнения Кортевега — де Фриза, представляется два-вектором

$$\Theta=\frac{1}{2}\int\{\theta\wedge\mathscr{E}(\theta)\}\,dx=\frac{1}{2}\int\left\{\theta\wedge\theta_{xxx}+\frac{2}{3}u\theta\wedge\theta_x\right\}dx,\qquad(7.15)$$

причем член, содержащий $\theta\wedge\theta$, очевидно, обращается в нуль.

Тождество Якоби дает естественный пример функционального три-вектора. Заметим, что в своей исходной форме левая часть тождества (7.3), очевидно, является кососимметрической трилинейной функцией вариационных производных $\delta\mathscr{P}$, $\delta\mathscr{Q}$, $\delta\mathscr{R}$. Поэтому и левая часть равенства (7.11), хотя, быть может, это и незаметно, тоже представляет собой кососимметрическую трилинейную функцию от наборов из q функций P, Q, R и поэтому определяет функциональный три-вектор, который мы обозначим через

$$\Psi=\frac{1}{2}\int\{\theta\wedge\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\mathscr{D})\wedge\theta\}\,dx,\qquad(7.16)$$

так что левая часть выражения (7.11) имеет вид $\langle\Psi;\ P,\ Q,\ R\rangle$. (См. также упр. 7.12.) Осталось пояснить обозначения в формуле (7.16).

«Векторное поле» $\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}$ — это формальное эволюционное векторное поле, характеристика которого — набор из q вертикальных один-векторов

$$(\mathscr{D}\theta)_\alpha=\sum_{\beta=1}^{q}\mathscr{D}_{\alpha\beta}\theta^\beta;$$

таким образом, формально

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}=\sum_{\alpha,J}D_J\left(\sum_\beta\mathscr{D}_{\alpha\beta}\theta^\beta\right)\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}.$$

В частности, для любой дифференциальной функции $R\in\mathscr{A}$

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(R)=\sum_{\alpha,J}\frac{\partial R}{\partial u_J^\alpha}D_J\left(\sum_\beta\mathscr{D}_{\alpha\beta}\theta^\beta\right)$$

является вертикальным один-вектором. Например, для второго гамильтонова оператора уравнения Кортевега — де Фриза имеем

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(u) = \mathscr{E}\theta = \theta_{xxx} + \frac{2}{3}u\theta_x + \frac{1}{3}u_x\theta,$$

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(u_x) = D_x\mathscr{E}\theta = \theta_{xxxx} + \frac{2}{3}u\theta_{xx} + u_x\theta_x + \frac{1}{3}u_{xx}\theta$$

и так далее.

С другой стороны, $\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}$ может действовать на дифференциальный оператор, скажем $\mathscr{D}$, как производная Ли; результатом этого действия будет дифференциальный оператор, коэффициентами которого будут функциональные один-векторы, включающие θ_J^α. Например,

$$\begin{aligned}\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(\mathscr{E}) &= \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}\left(D_x^3 + \frac{2}{3}uD_x + \frac{1}{3}u_x\right) = \\ &= \frac{2}{3}\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(u)D_x + \frac{1}{3}\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(u_x) = \\ &= \frac{2}{3}\left(\theta_{xxx} + \frac{2}{3}u\theta_x + \frac{1}{3}u_x\theta\right)D_x + \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(\theta_{xxxx} + \frac{2}{3}u\theta_{xx} + u_x\theta_x + \frac{1}{3}u_{xx}\theta\right).\end{aligned}$$

И наконец, мы можем применить $\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\mathscr{D})$ к самому θ, комбинируя очевидным образом дифференцирование и внешнее умножение. Например, три-вектор тождества Якоби, соответствующий оператору $\mathscr{E}$, равен

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\{\theta\wedge\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(\mathscr{E})\wedge\theta\}\,dx &= \int\Big\{\frac{1}{3}\theta\wedge\theta_{xxx}\wedge\theta_x + \frac{2}{9}u\theta\wedge\theta_x\wedge\theta_x + \\ &\quad + \frac{1}{9}u_x\theta\wedge\theta\wedge\theta_x + \frac{1}{6}\theta\wedge\theta_{xxxx}\wedge\theta + \\ &\quad + \frac{1}{9}u\theta\wedge\theta_{xx}\wedge\theta + \frac{1}{6}u_x\theta\wedge\theta_x\wedge\theta + \\ &\quad + \frac{1}{18}u_{xx}\theta\wedge\theta\wedge\theta\Big\}\,dx = \\ &= -\frac{1}{3}\int\{\theta\wedge\theta_x\wedge\theta_{xxx}\}\,dx\end{aligned}$$

в силу основных свойств внешнего произведения. Этот полученный три-вектор также тривиален, в чем можно убедиться простым интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}\int\{\theta\wedge\theta_x\wedge\theta_{xxx}\}\,dx &= -\int\{D_x(\theta\wedge\theta_x)\wedge\theta_{xx}\}\,dx = \\ &= -\int\{\theta_x\wedge\theta_x\wedge\theta_{xx} + \theta\wedge\theta_{xx}\wedge\theta_{xx}\}\,dx = 0.\end{aligned}$$

В соответствии с этим обозначением при вычислении Ψ по формуле (7.16) на P, Q, $R \in \mathcal{A}^q$ мы получим шесть членов, первые два из которых имеют вид

$$\frac{1}{2}\int \left[P \operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}R}(\mathcal{D})\, Q - Q \operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}R}(\mathcal{D})\, P\right] dx.$$

Ввиду упр. 7.12, так как дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ антисимметричен, это же справедливо и для $\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(\mathcal{D})$ при любом эволюционном векторном поле $\mathbf{v}_Q$. Поэтому указанные выше два члена равны и в сумме дают первый член тождества Якоби (7.11). Значит, как и утверждалось выше, выражение $\langle\Psi; P, Q, R\rangle$ совпадает с левой частью формулы (7.11). Кроме того, с помощью леммы 5.61 (перенесенной на мультивекторы) получаем, что выполнение равенства (7.11) эквивалентно тривиальности три-вектора Ψ.

Предложение 7.7. *Антисимметрический матричный дифференциальный оператор* $\mathcal{D}$ *размера* $q \times q$ *гамильтонов, если и только если функциональный три-вектор* (7.16) *нулевой*: $\Psi = 0$.

Можно сделать еще одно упрощение. Расширим определение продолженного «векторного поля» $\operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}$ на пространство вертикальных один-векторов, положив

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}(\theta^\alpha_J) = 0$$

для всех α, J и продолжив его как дифференцирование. Теперь подынтегральное выражение в (7.16) можно переписать в виде

$$-\operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}(\theta \wedge \mathcal{D}\theta) = \theta \wedge \operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}(\mathcal{D}) \wedge \theta, \tag{7.17}$$

минус объясняется тем, что мы поменяли порядок сомножителей во внешнем произведении. Кроме того, так как поле $\operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}$ эволюционное, оно коммутирует с полным дифференцированием:

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta} \cdot D_k = D_k \cdot \operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}, \qquad k = 1, \ldots, p,$$

ср. (5.19), даже при действии на вертикальные мультивекторы. Поэтому для любого функционального k-вектора $\Phi = \int \tilde{\Phi}\, dx$ мы можем корректно определить $(k+1)$-вектор

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}(\Phi) = \int \operatorname{pr} \mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta}(\tilde{\Phi})\, dx.$$

(См. упр. 5.42.) В частности, таким образом можно подействовать на два-вектор θ, определяющий скобку Пуассона (7.14), и по (7.17) получаем

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\Theta) = \frac{1}{2}\int \{\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\theta \wedge \mathscr{D}\theta)\}\,dx = -\Psi;$$

результат с точностью до знака равен три-вектору, соответствующему тождеству Якоби. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.8. *Пусть $\mathscr{D}$ — антисимметрический матричный дифференциальный оператор размера $q \times q$ и $\Theta = \frac{1}{2}\int\{\theta \wedge \wedge \mathscr{D}\theta\}\,dx$ — соответствующий функциональный два-вектор. Тогда $\mathscr{D}$ гамильтонов, если и только если*

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\Theta) = 0. \tag{7.18}$$

Пример 7.9. Вернемся в последний раз к гамильтонову оператору $\mathscr{E}$, связанному с уравнением Кортевега — де Фриза. В силу условий (7.15) и (7.18) нам нужно только проверить равенство нулю выражения

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}\int\left\{\frac{1}{2}\theta \wedge \theta_{xxx} + \frac{1}{3}u\theta \wedge \theta_x\right\}dx = \frac{1}{3}\int\{\mathscr{E}(\theta) \wedge \theta \wedge \theta_x\}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int\left(\theta_{xxx} \wedge \theta \wedge \theta_x + \frac{2}{3}u\theta_x \wedge \theta \wedge \theta_x + \frac{1}{3}u_x\theta \wedge \theta \wedge \theta_x\right)dx = 0$$

в силу наших предыдущих вычислений. Тем самым мы доказали совершенно элементарным путем, что $\mathscr{E}$ гамильтонов.

Пример 7.10. Рассмотрим уравнения Эйлера для потока невязкой идеальной жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

(Обозначения см. в примере 2.45.) В таком виде они не могут составлять гамильтонову систему, так как, в частности, нет уравнения, описывающего эволюцию во времени давления p. Эту трудность легче всего преодолеть, переписав уравнения относительно *вихря* $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$. Взяв ротор первого набора уравнений, находим уравнение вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}\nabla\omega, \tag{7.19}$$

которое мы приведем к гамильтонову виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathscr{D}\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \omega} \tag{7.20}$$

для подходящего гамильтонова оператора $\mathcal{D}$. Гамильтонов функционал — это энергия

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dx,$$

но для вывода уравнения (7.20) нам надо вычислить его вариационную производную по ω, а не по $\mathbf{u}$! (Формально) это делается путем введения векторной функции тока ψ, удовлетворяющей условиям $\nabla \times \psi = \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \psi = 0$. Пусть функция $\eta(\mathbf{x})$ имеет компактный носитель и $\nabla \times \eta = \zeta$. Тогда

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{H}[\omega + \varepsilon\zeta] = \int \mathbf{u} \cdot \eta \, d\mathbf{x} = \int (\nabla \times \psi) \cdot \eta \, d\mathbf{x} =$$

$$= \int \psi \cdot (\nabla \times \eta) \, d\mathbf{x} = \int \psi \cdot \zeta \, d\mathbf{x},$$

и поэтому $\delta\mathcal{H}/\delta\omega = \psi$.

В двумерном случае функция $\mathbf{u} = (u, v)$ зависит от (x, y, t) и у вихря отлична от нуля одна компонента $\omega = v_x - u_y$. Уравнение вихря при этом имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -u\omega_x - v\omega_y = \omega_x\psi_y - \omega_y\psi_x, \tag{7.21}$$

где ψ — функция тока, $\psi_x = v$, $\psi_y = -u$. Положив

$$\mathcal{D} = \omega_x D_y - \omega_y D_x,$$

видим, что уравнение (7.21) имеет вид (7.20) с энергией в качестве гамильтонова функционала.

Чтобы доказать, что оператор $\mathcal{D}$ гамильтонов, заметим сначала, что

$$\mathcal{D}^* = -D_y \cdot \omega_x + D_x \cdot \omega_y = -\mathcal{D},$$

и поэтому $\mathcal{D}$ антисимметричен. Тождество Якоби доказывается проверкой условия (7.18):

$$0 = \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{D}\theta} \int \{\omega_x\theta \wedge \theta_y - \omega_y\theta \wedge \theta_x\} \, dx\, dy =$$

$$= \int \{D_x(\omega_x\theta_y - \omega_y\theta_x) \wedge \theta \wedge \theta_y - D_y(\omega_x\theta_y - \omega_y\theta_x) \wedge \theta \wedge \theta_x\} \, dx\, dy =$$

$$= \int \{\omega_x(\theta_{xy} \wedge \theta \wedge \theta_y - \theta_{yy} \wedge \theta \wedge \theta_x) +$$

$$+ \omega_y(\theta_{xy} \wedge \theta \wedge \theta_x - \theta_{xx} \wedge \theta \wedge \theta_y)\} \, dx\, dy.$$

Второй и четвертый член после интегрирования по частям дают

$$\int \{\omega_x(\theta_{xy} \wedge \theta \wedge \theta_y + \theta_y \wedge \theta \wedge \theta_{xy}) + \omega_{xy}\theta_y \wedge \theta \wedge \theta_x +$$

$$+ \omega_y(\theta_{xy} \wedge \theta \wedge \theta_x + \theta_x \wedge \theta \wedge \theta_{xy}) + \omega_{xy}\theta_x \wedge \theta \wedge \theta_y\} \, dx\, dy = 0$$

в силу кососимметричности внешнего умножения. Таким образом, оператор $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям теоремы 7.8 и корректно определяет скобку Пуассона, относительно которой двумерные эйлеровы уравнения являются гамильтоновыми. Трехмерный вариант мы оставляем читателю; см. упр. 7.5.

7.2. СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Соответствие между гамильтоновыми группами симметрий и законами сохранения для систем эволюционных уравнений в гамильтоновом виде строится в общих чертах так же, как и в разобранном в § 6.3 конечномерном случае. Сначала мы должны исследовать «отмеченные функционалы», обязанные своим существованием вырожденности самой скобки Пуассона; они определяют законы сохранения для *всех* систем с данной гамильтоновой структурой. Дополнительные законы сохранения, порожденные симметрией конкретного гамильтонова функционала, можно вывести затем из обобщенных симметрий, которые сами являются гамильтоновыми.

Отмеченные функционалы

Определение 7.11. Пусть $\mathscr{D}$ — гамильтонов дифференциальный оператор размера $q \times q$. *Отмеченный функционал* для $\mathscr{D}$ — это такой функционал $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$, что $\mathscr{D}\delta\mathscr{C} = 0$ для всех x, u.

Иными словами, гамильтонова система, соответствующая отмеченному функционалу, тривиальна: $u_t = 0$. Ввиду равенства (76.4) заключаем, что функционал $\mathscr{C}$ отмечен тогда и только тогда, когда его скобка Пуассона с любым другим функционалом тривиальна:

$$\{\mathscr{C}, \mathscr{H}\} = 0 \text{ для всех } \mathscr{H} \in \mathscr{F}.$$

Отсюда немедленно вытекает

Предложение 7.12. *Пусть $\mathscr{D}$ — гамильтонов оператор. Если $\mathscr{C}$ — отмеченный функционал для $\mathscr{D}$, то $\mathscr{C}$ определяет закон сохранения для любой гамильтоновой относительно $\mathscr{D}$ системы $u_t = \mathscr{D}\delta\mathscr{H}$.*

Пример 7.13. Для первого гамильтонова оператора $\mathscr{D} = D_x$ уравнения Кортевега — де Фриза отмеченный функционал должен удовлетворять условию $D_x\delta\mathscr{C} = 0$, или, что то же самое, $\delta\mathscr{C}$ постоянна. Всякий такой функционал, с точностью до по-