в силу кососимметричности внешнего умножения. Таким образом, оператор $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям теоремы 7.8 и корректно определяет скобку Пуассона, относительно которой двумерные эйлеровы уравнения являются гамильтоновыми. Трехмерный вариант мы оставляем читателю; см. упр. 7.5.

7.2. СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Соответствие между гамильтоновыми группами симметрий и законами сохранения для систем эволюционных уравнений в гамильтоновом виде строится в общих чертах так же, как и в разобранном в § 6.3 конечномерном случае. Сначала мы должны исследовать «отмеченные функционалы», обязанные своим существованием вырожденности самой скобки Пуассона; они определяют законы сохранения для *всех* систем с данной гамильтоновой структурой. Дополнительные законы сохранения, порожденные симметрией конкретного гамильтонова функционала, можно вывести затем из обобщенных симметрий, которые сами являются гамильтоновыми.

Отмеченные функционалы

Определение 7.11. Пусть $\mathscr{D}$ — гамильтонов дифференциальный оператор размера $q \times q$. *Отмеченный функционал* для $\mathscr{D}$ — это такой функционал $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$, что $\mathscr{D}\delta\mathscr{C} = 0$ для всех x, u.

Иными словами, гамильтонова система, соответствующая отмеченному функционалу, тривиальна: $u_t = 0$. Ввиду равенства (76.4) заключаем, что функционал $\mathscr{C}$ отмечен тогда и только тогда, когда его скобка Пуассона с любым другим функционалом тривиальна:

$$\{\mathscr{C}, \mathscr{H}\} = 0 \text{ для всех } \mathscr{H} \in \mathscr{F}.$$

Отсюда немедленно вытекает

Предложение 7.12. *Пусть $\mathscr{D}$ — гамильтонов оператор. Если $\mathscr{C}$ — отмеченный функционал для $\mathscr{D}$, то $\mathscr{C}$ определяет закон сохранения для любой гамильтоновой относительно $\mathscr{D}$ системы $u_t = \mathscr{D}\delta\mathscr{H}$.*

Пример 7.13. Для первого гамильтонова оператора $\mathscr{D} = D_x$ уравнения Кортевега — де Фриза отмеченный функционал должен удовлетворять условию $D_x\delta\mathscr{C} = 0$, или, что то же самое, $\delta\mathscr{C}$ постоянна. Всякий такой функционал, с точностью до постоянного множителя, есть масса $\mathscr{M}[u]=\int u\,dx$. Таким образом, в соответствии с предложением 7.12 всякое L^1-решение любого эволюционного уравнения вида $u_t=D_x\delta\mathscr{H}$ автоматически удовлетворяет закону сохранения массы $\int u\,dx=\mathrm{const}$. (На самом деле это утверждение можно обобщить, см. упр. 7.8.) С другой стороны, второй гамильтонов оператор $\mathscr{E}$ не допускает нетривиальных отмеченных функционалов, и поэтому его можно рассматривать как «симплектический».

Скобки Ли

Как и в конечномерной ситуации, главный результат, необходимый для доказательства теоремы нётерова типа, связывающей группы симметрий и законы сохранения,— это соответствие между скобкой Пуассона функционалов и коммутатором соответствующих гамильтоновых векторных полей.

Предложение 7.14. *Пусть* $\{\cdot,\ \cdot\}$ — *скобка Пуассона, определенная дифференциальным оператором* $\mathscr{D}$. *Пусть* $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}\in\mathscr{F}$ — *функционалы с соответствующими гамильтоновыми векторными полями* $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}$, $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}$. *Тогда гамильтоново поле, соответствующее скобке Пуассона* $\{\mathscr{P},\ \mathscr{Q}\}$, *является скобкой Ли векторных полей* $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}$ *и* $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}$:

$$\hat{\mathbf{v}}_{\{\mathscr{P},\mathscr{Q}\}}=-[\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}},\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}]=[\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}},\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}]. \tag{7.22}$$

(*Скобка Ли дается определением* 5.14.)

Доказательство. Рассмотрим произвольный функционал $\mathscr{R}$. Применив к $\mathscr{R}$ продолжение поля $\hat{\mathbf{v}}_{\{\mathscr{P},\mathscr{Q}\}}$ с учетом равенства (7.4) и тождества Якоби, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\{\mathscr{P},\mathscr{Q}\}}(\mathscr{R})&=\{\mathscr{R},\ \{\mathscr{P},\ \mathscr{Q}\}\}=\\&=\{\{\mathscr{R},\ \mathscr{P}\},\ \mathscr{Q}\}-\{\{\mathscr{R},\ \mathscr{Q}\},\ \mathscr{P}\}=\\&=\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}(\{\mathscr{R},\ \mathscr{P}\})-\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}(\{\mathscr{R},\ \mathscr{Q}\})=\\&=(\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}\cdot\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}-\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}\cdot\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}})\,\mathscr{R}.\end{aligned}$$

В силу тождества (5.21) последнее выражение является продолжением скобки Ли полей $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}$, $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}$, т. е.

$$\mathrm{pr}\,\hat{\mathbf{v}}_{\{\mathscr{P},\mathscr{Q}\}}(\mathscr{R})=-\mathrm{pr}\,([\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}},\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}])\,\mathscr{R}$$

для каждого $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$. Согласно упр. 5.42, это равенство выполняется только в случае, когда два обобщенных векторных поля совпадают, что и доказывает (7.22). □

Законы сохранения

Как мы отмечали в гл. 4, всякий закон сохранения системы эволюционных уравнений записывается в виде

$$D_t T + \mathrm{Div}\, X = 0,$$

где через Div обозначена дивергенция по пространственным переменным, и можно без потери общности считать, что плотность $T(x, t, u^{(n)})$ зависит только от производных функций u по x. Это условие можно выразить и так: при $\Omega \subset X$ функционал

$$\mathcal{T}[t;\ u] = \int_\Omega T(x,\ t,\ u^{(n)})\, dx$$

является не зависящей от t константой для всех решений u, таких, что $T(x, t, u^{(n)}) \to 0$ при $x \to \partial\Omega$.

Заметим, что для любой такой дифференциальной функции $T(x,\ t,\ u^{(n)})$ и любого решения u эволюционной системы $u_t = P[u]$

$$D_t T = \partial_t T + \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_P(T),$$

где через $\partial_t = \partial/\partial t$ обозначено взятие частной производной по t. Таким образом, функция T является плотностью для некоторого закона сохранения системы тогда и только тогда, когда соответствующий ей функционал $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию

$$\partial\mathcal{T}/\partial t + \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_P(\mathcal{T}) = 0. \tag{7.23}$$

В случае когда наша система имеет гамильтонов вид, соотношение (7.4) немедленно приводит к соотношению Нётер между гамильтоновыми симметриями и законами сохранения.

Теорема 7.15. *Пусть $u_t = \mathcal{D}\delta\mathcal{H}$ — гамильтонова система эволюционных уравнений. Гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{P}}$ с характеристикой $\mathcal{D}\delta\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$, определяет группу обобщенных симметрий системы тогда и только тогда, когда существует эквивалентный функционал $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} - \mathcal{C}$, отличающийся от $\mathcal{P}$ лишь на зависящий от времени отмеченный функционал $\mathcal{C}[t;\ u]$, такой, что $\tilde{\mathcal{P}}$ определяет закон сохранения.*

Доказательство. Под зависящим от времени отмеченным функционалом мы по аналогии с гл. 6 понимаем функционал

$\mathscr{C}[t; u] = \int C(t, x, u^{(n)})\,dx$, где C зависит от t, x, u и производных от u по x, обладающий тем свойством, что при любом фиксированном значении t_0 $\mathscr{C}[t_0; u]$ является отмеченным функционалом для $\mathscr{D}$: $\mathscr{D}\delta\mathscr{C} = 0$. В соответствии с предложением 5.19 векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}$ является симметрией гамильтоновой системы тогда и только тогда, когда

$$\partial\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}/\partial t + [\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{H}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}] = 0, \tag{7.24}$$

где $\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{H}}$ — соответствующее гамильтоново векторное поле. Так как оператор $\mathscr{D}$ не зависит явно от t, то векторное поле $\partial\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}/\partial t$ является гамильтоновым и соответствует функционалу $\partial\mathscr{P}/\partial t$, а по предыдущему предложению $[\hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{H}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}]$ является гамильтоновым векторным полем для скобки Пуассона функционалов $\mathscr{P}$ и $\mathscr{H}$. Таким образом, из равенства (7.24) следует, что гамильтоново векторное поле для функционала $\partial_t\mathscr{P} + \{\mathscr{P}, \mathscr{H}\}$ равно нулю, и поэтому

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t} + \{\mathscr{P}, \mathscr{H}\} = \tilde{\mathscr{C}}$$

для некоторого зависящего от времени отмеченного функционала

$$\tilde{\mathscr{C}}[t; u] = \int \tilde{C}(t, x, u^{(n)})\,dx.$$

Положим теперь

$$\mathscr{C}[t; u] = \int_{t_0}^{t} \tilde{\mathscr{C}}[s; u]\,ds \equiv \int \left(\int_{t_0}^{t} \tilde{C}(s, x, u^{(n)})\,ds \right) dx,$$

и пусть $\tilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} - \mathscr{C}$. Тогда

$$\frac{\partial\tilde{\mathscr{P}}}{\partial t} = \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t} - \tilde{\mathscr{C}},$$

а по определению отмеченного функционала

$$\{\mathscr{P}, \mathscr{H}\} = \{\tilde{\mathscr{P}}, \mathscr{H}\}.$$

Таким образом, функционал $\tilde{\mathscr{P}}$ удовлетворяет условию (7.23) и поэтому сохраняется; теорема доказана. □

Пример 7.16. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \tag{7.25}$$

две гамильтоновы структуры которого обсуждались в примере 7.6. Выясним, какие из классических групп симметрий из примера 2.44 являются гамильтоновыми и, таким образом, приводят к законам сохранения. Симметрии порождены векторными полями

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x,\quad \mathbf{v}_2 = \partial_t,\quad \mathbf{v}_3 = t\partial_x - \partial_u,\quad \mathbf{v}_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u,$$

ср. (2.68), где x заменено на $-x$, а соответствующие характеристики имеют вид

$$Q_1 = u_x,\quad Q_2 = u_{xxx} + uu_x,\quad Q_3 = 1 + tu_x,$$
$$Q_4 = 2u + xu_x + 3t\,(u_{xxx} + uu_x)$$

(с точностью до знака).

Для первого гамильтонова оператора $\mathscr{D} = D_x$ существует один независимый нетривиальный отмеченный функционал — масса $\mathscr{P}_0 = \mathscr{M} = \int u\,dx$,— который поэтому сохраняется. Из указанных выше четырех характеристик первые три гамильтоновы:

$$Q_i = D_x \delta \mathscr{P}_i \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{7.26}$$

с соответствующими сохраняющимися функционалами

$$\mathscr{P}_1 = \int \frac{1}{2}\, u^2 dx,\quad \mathscr{P}_2 = \int \left(\frac{1}{6}\, u^3 - \frac{1}{2}\, u_x^2\right) dx,$$

$$\mathscr{P}_3 = \int \left(xu + \frac{1}{2}\, tu^2\right) dx.$$

Отметим, что $\mathscr{P}_2$ — это в точности гамильтонов функционал для уравнения (7.25) с гамильтоновым оператором $\mathscr{D}$. Из инвариантности функционалов $\mathscr{P}_3$ и $\mathscr{P}_1$ следует, что первый момент функции u является линейной функцией от t:

$$\int xu\,dx = at + b,\quad a,\ b \text{ — постоянные},$$

где $a = -\int (1/2)\, u^2\, dx$ для любого решения u, достаточно быстро убывающего при $|x| \to \infty$, или для любого периодического решения; в последнем случае интеграл берется по периоду. Четвертая характеристика Q_4 не имеет вида (7.26) и поэтому не порождает закона сохранения.

Что можно сказать о втором гамильтоновом операторе $\mathscr{E} = D_x^3 + (2/3)\, uD_x + (1/3)\, u_x$? В этом случае отмеченных функционалов нет. Функционалы Q_1, Q_2 и Q_4 (но не Q_3) гамильтоновы:

$$Q_i = \mathscr{E} \delta \tilde{\mathscr{P}}_i,\quad i = 1,\ 2,\ 4, \tag{7.27}$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = 3\mathcal{P}_0 = 3\int u\,dx, \quad \tilde{\mathcal{P}}_2 = \mathcal{P}_1 = \int \frac{1}{2}u^2\,dx,$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_4 = 3\mathcal{P}_3 = 3\int \left(xu + \frac{1}{2}tu^2\right)dx$$

— соответствующие законы сохранения. В этом случае ничего нового мы не получаем. Отметим, что еще один закон сохранения $\mathcal{P}_2$ *не порожден* ни одной из геометрических симметрий. В соответствии с теоремой 7.15, однако, *он порожден* некоторой гамильтоновой симметрией, а именно $\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{P}_2}$. Характеристика этой обобщенной симметрии равна

$$Q_5 = \mathcal{E}\delta\mathcal{P}_2 = \left(D_x^3 + \frac{2}{3}uD_x + \frac{1}{3}u_x\right)\left(u_{xx} + \frac{1}{2}u^2\right) =$$

$$= u_{xxxxx} + \frac{5}{3}uu_{xxx} + \frac{10}{3}u_xu_{xx} + \frac{5}{6}u^2u_x.$$

Таким образом, мы переоткрыли обобщенную симметрию пятого порядка из § 5.2! Следуя дальше, заметим, что Q_5, оказывается, удовлетворяет условию гамильтоновости (7.26) для оператора $\mathcal{D}$, и функционал

$$\mathcal{P}_5 = \int \left(\frac{1}{2}u_{xx}^2 - \frac{5}{6}uu_x^2 + \frac{5}{72}u^4\right)dx$$

дает еще один закон сохранения для уравнения Кортевега — де Фриза. К этому моменту начинают проявляться признаки рекурсивной процедуры порождения законов сохранения и соответствующих гамильтоновых симметрий для уравнения Кортевега — де Фриза. Возьмем новый закон сохранения $\mathcal{P}_5$, определим его гамильтоново векторное поле относительно оператора $\mathcal{E}$, которое по теореме 7.15 обязательно является симметрией, а затем попробуем найти еще один функционал $\mathcal{P}_6$, для которого это векторное поле гамильтоново по отношению к другому гамильтонову оператору $\mathcal{D}$, и т. д. Строгое развитие этой рекурсивной схемы для произвольного уравнения с двумя гамильтоновыми структурами составит содержание § 7.3.

Пример 7.17. Двумерные уравнения Эйлера были приведены к гамильтонову виду в примере 7.10. Изучим, какого типа законы сохранения мы в результате получаем. Нам нужно рассмотреть сначала отмеченные функционалы для гамильтонова оператора $\mathcal{D} = \omega_xD_y - \omega_yD_x$. Непосредственное вычисление показывает, что дифференциальная функция $P[\omega]$ лежит в ядре оператора $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}P = 0$, если и только если $P = P(\omega)$ является функцией от ω (но не зависит ни от x, ни от y, ни от какой-либо производной от ω). Поэтому функционалы

$$\mathscr{C}[\omega]=\int C(\omega)\,dx\,dy$$

для *любой* гладкой функции $C(\omega)$ от вихря ω все являются отмеченными и, таким образом, сохраняются на решениях уравнений Эйлера. Эти хорошо известные «интегралы по областям» отражают сохранение вихря «жидкой частицы» для двумерного потока несжимаемой жидкости.

Теперь мы построим законы сохранения, порожденные евклидовыми симметриями уравнений Эйлера, обнаруженными в примере 2.45. Заметим сначала, что нам нужно найти «ω-характеристику» каждой из образующих симметрии, т. е. переписать ее в виде продолжения некоторого эволюционного векторного поля вида $\mathbf{v}=Q(x, y, t, u, v, p, \omega, \ldots)\partial_\omega$. Для гамильтонова векторного поля $\mathbf{v}$ мы можем вывести отсюда существование закона сохранения $\mathscr{P}[\omega]$, для которого $\mathscr{D}\delta\mathscr{P}=Q$. Например, для симметрии сдвига

$$\mathbf{v}_\alpha=\alpha\partial_x+\alpha_t\partial_u-\alpha_{tt}x\partial_p, \quad \alpha=\alpha(t),$$

эволюционный вид таков:

$$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha=(\alpha_t-\alpha u_x)\,\partial_u-\alpha v_x\partial_v-(\alpha_{tt}x+\alpha p_x)\,\partial_p.$$

Продолжая $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$, мы видим, что коэффициент при ω равен

$$Q=-\alpha\omega_x=-\mathscr{D}(\alpha y)=-\mathscr{D}\delta\mathscr{P}_\alpha,$$

где

$$\mathscr{P}_\alpha=\int\alpha(t)\,y\omega\,dx\,dy=\int\alpha(t)\,u\,dx\,dy$$

— соответствующий сохраняющийся функционал (мы проинтегрировали по частям). Подобным образом, симметрии сдвига $\mathbf{v}_\beta$ приводят к законам сохранения

$$\mathscr{P}_\beta=-\int\beta(t)\,x\omega\,dx\,dy=\int\beta(t)\,v\,dx\,dy,$$

где $\beta(t)$ — также произвольная функция от t. Кажется парадоксальным, что $\mathscr{P}_\alpha$ и $\mathscr{P}_\beta$ при любых функциях $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ оказываются законами сохранения, но парадокс разрешается при рассмотрении граничных вкладов. Положив $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha(t), \beta(t))$, имеем дивергентное тождество в векторном виде

$$D_t(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{u})+\mathrm{Div}\,[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{u}-\boldsymbol{\alpha}_t\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{u}+p\boldsymbol{\alpha}]=0,$$

которое выполняется для всех решений $\mathbf{u}=(u, v)$ уравнений Эйлера. После интегрирования получаем обобщенные соотношения импульса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\mathbf{u})\,d\mathbf{x}=-\int\limits_{\partial\Omega}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{u}-\boldsymbol{\alpha}_t\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{u}+p\boldsymbol{\alpha}]\cdot dS,$$

справедливые в любой подобласти Ω. Именно в этом смысле «сохраняются» указанные выше функционалы $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{P}_\beta$.

Симметрия вращения

$$y\partial_x-x\partial_y+v\partial_u-u\partial_v$$

имеет ω-эволюционный вид

$$(y\omega_x-x\omega_y)\,\partial_\omega,$$

являющийся гамильтоновым. Мы получаем

$$(y\omega_x-x\omega_y)=\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)=\mathcal{D}\delta\mathcal{T},$$

где

$$\mathcal{T}=\int\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,\omega\,dx\,dy=\int(yu-xv)\,dx\,dy$$

— сохраняемый момент количества движения жидкости. Таким образом, для двумерных уравнений Эйлера существуют три бесконечных семейства законов сохранения. Два из них порождены обобщенными симметриями сдвигов, а одно — интегралы по областям — отражает вырожденность исходной скобки Пуассона. Кроме того, имеются также отдельные законы сохранения момента количества движения и энергии. Трехмерный случай несколько отличается от двумерного — см. упр. 7.5.

7.3. БИГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

В этом последнем параграфе мы обсуждаем замечательные свойства систем эволюционных уравнений, которые, как и уравнение Кортевега — де Фриза, можно записать в гамильтоновом виде не одним, а *двумя* различными способами. Таким образом, нас будут интересовать системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K_1[u]=\mathcal{D}\delta\mathcal{H}_1=\mathcal{E}\delta\mathcal{H}_0, \tag{7.28}$$

где оба оператора $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ гамильтоновы, а $\mathcal{H}_0[u]$ и $\mathcal{H}_1[u]$ — соответствующие гамильтоновы функционалы. Благодаря условию совместности двух пуассоновых структур, определяемых операторами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$, мы сможем рекурсивно построить бесконечную иерархию симметрий и законов сохранения для этой системы следующим образом.