шения импульса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\mathbf{u})\,d\mathbf{x}=-\int\limits_{\partial\Omega}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{u}-\boldsymbol{\alpha}_t\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{u}+p\boldsymbol{\alpha}]\cdot d\mathbf{S},$$

справедливые в любой подобласти Ω. Именно в этом смысле «сохраняются» указанные выше функционалы $\mathscr{P}_\alpha$, $\mathscr{P}_\beta$.

Симметрия вращения

$$y\partial_x-x\partial_y+v\partial_u-u\partial_v$$

имеет ω-эволюционный вид

$$(y\omega_x-x\omega_y)\,\partial_\omega,$$

являющийся гамильтоновым. Мы получаем

$$(y\omega_x-x\omega_y)=\mathscr{D}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)=\mathscr{D}\delta\mathscr{T},$$

где

$$\mathscr{T}=\int\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,\omega\,dx\,dy=\int(yu-xv)\,dx\,dy$$

— сохраняемый момент количества движения жидкости. Таким образом, для двумерных уравнений Эйлера существуют три бесконечных семейства законов сохранения. Два из них порождены обобщенными симметриями сдвигов, а одно — интегралы по областям — отражает вырожденность исходной скобки Пуассона. Кроме того, имеются также отдельные законы сохранения момента количества движения и энергии. Трехмерный случай несколько отличается от двумерного — см. упр. 7.5.

7.3. БИГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

В этом последнем параграфе мы обсуждаем замечательные свойства систем эволюционных уравнений, которые, как и уравнение Кортевега — де Фриза, можно записать в гамильтоновом виде не одним, а *двумя* различными способами. Таким образом, нас будут интересовать системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K_1[u]=\mathscr{D}\delta\mathscr{H}_1=\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_0,\tag{7.28}$$

где оба оператора $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ гамильтоновы, а $\mathscr{H}_0[u]$ и $\mathscr{H}_1[u]$ — соответствующие гамильтоновы функционалы. Благодаря условию совместности двух пуассоновых структур, определяемых операторами $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$, мы сможем рекурсивно построить бесконечную иерархию симметрий и законов сохранения для этой системы следующим образом.

В соответствии с теоремой 7.15 для любого сохраняющегося относительно уравнения (7.28) функционала $\mathscr{P}[u]$ *оба* гамильтоновых векторных поля $\mathbf{v}_{\mathscr{D}\delta\mathscr{P}}$ и $\mathbf{v}_{\mathscr{E}\delta\mathscr{P}}$ являются симметриями. В частности, так как сохраняются оба функционала $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}_1$, то симметриями уравнения (7.28) являются не только исходное векторное поле $\mathbf{v}_{K_1}=\mathbf{v}_{\mathscr{D}\delta\mathscr{H}_1}=\mathbf{v}_{\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_0}$, но также и два дополнительных векторных поля $\mathbf{v}_{\mathscr{D}\delta\mathscr{H}_0}$ и $\mathbf{v}_{\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_1}$. Рекурсивный алгоритм действует в предположении, что одна из этих новых симметрий, скажем $\mathbf{v}_{\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_1}$, является гамильтоновым векторным полем для другой гамильтоновой структуры, т. е.

$$\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_1=\mathscr{D}\delta\mathscr{H}_2$$

для некоторого функционала $\mathscr{H}_2$. Вновь по теореме 7.15 $\mathscr{H}_2$ (или некоторый эквивалентный ему функционал) сохраняется, и поэтому мы получаем еще одну симметрию, на этот раз с характеристикой $\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_2$. Теперь схема рекурсии ясна. На n-м шаге мы определяем новый функционал $\mathscr{H}_{n+1}$, удовлетворяющий рекурсивному соотношению

$$K_n\equiv\mathscr{D}\delta\mathscr{H}_n=\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_{n-1}. \tag{7.29}$$

Это соотношение порождает новый закон сохранения для исходной системы (7.28), а также новую симметрию $\mathbf{v}_{n+1}$ с характеристикой $K_{n+1}=\mathscr{E}\delta\mathscr{H}_n$. Заметим, что, введя оператор $\mathscr{R}=\mathscr{E}\cdot\mathscr{D}^{-1}$, мы можем формально записать

$$K_{n+1}=\mathscr{R}K_n$$

и предположить (так это и окажется на самом деле), что $\mathscr{R}$ будет определять оператор рекурсии для нашей системы.

Пример 7.18. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза, существование двух гамильтоновых структур для которого было доказано в упр. 7.6; для него

$$\mathscr{D}=D_x,\quad \mathscr{E}=D_x^3+\frac{2}{3}uD_x+\frac{1}{3}u_x.$$

Связующий оператор в иерархии гамильтоновых симметрий имеет вид

$$\mathscr{R}=\mathscr{E}\cdot\mathscr{D}^{-1}=D_x^2+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}u_xD_x^{-1},$$

а это не что иное, как оператор рекурсии Ленарда из § 5.2! Таким образом, наше исследование бигамильтоновых систем дает автоматически доказательство существования бесконечного набора законов сохранения и симметрий для уравнения Кортевега — де Фриза.

Однако для строгости рассуждений нам необходимо убедиться, что две гамильтоновы структуры «совместны» в следующем точном смысле:

Определение 7.19. Говорят, что пара антисимметрических матричных дифференциальных операторов $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ размера $q \times q$ образует *гамильтонову пару*, если любая их линейная комбинация $a\mathscr{D} + b\mathscr{E}$, a, $b \in \mathbb{R}$, является гамильтоновым оператором. Система эволюционных уравнений называется *бигамильтоновой*, если ее можно записать в виде (7.28) для гамильтоновой пары $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$.

Лемма 7.20. *Два антисимметрических оператора $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ образуют гамильтонову пару тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{D} + \mathscr{E}$ гамильтоновы.*

Доказательство. Заметим, что тождество Якоби в любой из своих форм (7.3), (7.11) или (7.18) *квадратично* по $\mathscr{D}$. Поэтому лемма легко следует из того, что любой квадратичный многочлен, обращающийся в нуль в трех различных точках, тождественно равен нулю. В применении к нашему случаю для P, Q, $R \in \mathscr{A}^q$ пусть $\mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; P, Q, R)$ обозначает левую часть равенства (7.11). Соответствующая симметрическая билинейная форма имеет вид

$$\mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{E}; P, Q, R) =$$
$$= \frac{1}{2} \int \big[P \cdot \mathbf{pr}\, \mathbf{v}_{\mathscr{D}R}(\mathscr{E}) Q + R \cdot \mathbf{pr}\, \mathbf{v}_{\mathscr{D}Q}(\mathscr{E}) P + Q \cdot \mathbf{pr}\, \mathbf{v}_{\mathscr{D}P}(\mathscr{E}) R +$$
$$+ P \cdot \mathbf{pr}\, \mathbf{v}_{\mathscr{E}R}(\mathscr{D}) Q + R \cdot \mathbf{pr}\, \mathbf{v}_{\mathscr{E}Q}(\mathscr{D}) P + Q \cdot \mathbf{pr}\, \mathbf{v}_{\mathscr{E}P}(\mathscr{D}) R\big]\, dx. \qquad (7.30)$$

Если операторы $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{D} + \mathscr{E}$ гамильтоиовы, то

$$\mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; P, Q, R) = \mathscr{J}(\mathscr{E}, \mathscr{E}; P, Q, R) = 0$$

и

$$\mathscr{J}(\mathscr{D} + \mathscr{E}, \mathscr{D} + \mathscr{E}; P, Q, R) =$$
$$= \mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; P, Q, R) + 2\mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{E}; P, Q, R) +$$
$$+ \mathscr{J}(\mathscr{E}, \mathscr{E}; P, Q, R) = 0,$$

и поэтому

$$\mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{E}; P, Q, R) = 0. \qquad (7.31)$$

Отсюда легко проверить, что

$$\mathscr{J}(a\mathscr{D} + b\mathscr{E}, a\mathscr{D} + b\mathscr{E}; P, Q, R) = 0$$

для всех a, $b \in \mathbb{R}$. $\square$

Следствие 7.21. *Два гамильтоновых дифференциальных оператора $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ образуют гамильтонову пару тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\Theta_{\mathscr{E}}) + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(\Theta_{\mathscr{D}}) = 0, \tag{7.32}$$

где

$$\Theta_{\mathscr{D}} = \frac{1}{2}\int \{\theta \wedge \mathscr{D}\theta\}\,dx, \quad \Theta_{\mathscr{E}} = \frac{1}{2}\int \{\theta \wedge \mathscr{E}\theta\}\,dx$$

— функциональные два-векторы, представляющие соответствующие скобки Пуассона.

Действительно,

$$\mathscr{J}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; P, Q, R) = \langle \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\Theta_{\mathscr{D}}); P, Q, R \rangle,$$

поэтому вычисление выражения (7.32) в P, Q, R дает (7.31). □

Пример 7.22. Рассмотрим гамильтоновы операторы $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, связанные с уравнением Кортевега — де Фриза. Очевидно,

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(\Theta_{\mathscr{D}}) = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}\int \frac{1}{2}\{\theta \wedge \theta_x\}\,dx = 0,$$

а

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}(\Theta_{\mathscr{E}}) = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}\int \left\{\frac{1}{2}\theta \wedge \theta_{xxx} + \frac{1}{3}u\theta \wedge \theta_x\right\} dx =$$
$$= \int \left\{\frac{1}{3}\theta_x \wedge \theta \wedge \theta_x\right\} dx = 0$$

ввиду свойств внешнего произведения. Таким образом, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ образуют гамильтонову пару.

Кстати, когда мы изучаем гамильтоновы пары, мы всегда исключаем тривиальный случай: один оператор равен другому, умноженному на постоянную. В случае систем (в отличие от скалярных уравнений) мы должны наложить дополнительное ограничение на один из операторов, скажем $\mathscr{D}$, связанное с появлением обратного к нему в формуле для оператора рекурсии.

Определение 7.23. Дифференциальный оператор $\mathscr{D}\colon \mathscr{A}^r \to \mathscr{A}^s$ называется *вырожденным*, если существует ненулевой дифференциальный оператор $\tilde{\mathscr{D}}\colon \mathscr{A}^s \to \mathscr{A}$, такой, что $\tilde{\mathscr{D}} \cdot \mathscr{D} \equiv 0$.

Например, матричный оператор

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} D_x^3 & -D_x^2 \\ D_x^2 & -D_x \end{pmatrix}$$

вырожден (и гамильтонов), так как для $\tilde{\mathcal{D}} = (1, -D_x)$ имеем $\tilde{\mathcal{D}} \cdot \mathcal{D} \equiv 0$. Нетрудно видеть, что вырожденность — это чисто матричное явление; любой отличный от нуля скалярный оператор $\mathcal{D}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ автоматически невырожден. (Полезный критерий невырожденности приведен в упр. 7.14.)

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему о бигамильтоновых системах.

Теорема 7.24. *Пусть*

$$u_t = K_1[u] = \mathcal{D}\delta\mathcal{H}_1 = \mathcal{E}\delta\mathcal{H}_0$$

— бигамильтонова система эволюционных уравнений. Предположим, что оператор $\mathcal{D}$ гамильтоновой пары невырожден. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{D}^{-1}$ — соответствующий оператор рекурсии, и пусть $K_0 = \mathcal{D}\delta\mathcal{H}_0$. Предположим, что для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ мы можем рекурсивно определить

$$K_n = \mathcal{R}K_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

т. е. для каждого n K_{n-1} лежит в образе оператора $\mathcal{D}$. Тогда существует последовательность функционалов $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots,$ такая, что

(i) *для каждого $n \geqslant 1$ эволюционное уравнение*

$$u_t = K_n[u] = \mathcal{D}\delta\mathcal{H}_n = \mathcal{E}\delta\mathcal{H}_{n-1} \tag{7.33}$$

является бигамильтоновой системой;

(ii) *соответствующие эволюционные векторные поля $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{K_n}$ попарно коммутируют:*

$$[\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m] = 0, \quad n, m \geqslant 0;$$

(iii) *гамильтоновы функционалы $\mathcal{H}_n$ попарно находятся в инволюции относительно каждой скобки Пуассона:*

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathcal{D}} = 0 = \{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathcal{E}}, \quad n, m \geqslant 0, \tag{7.34}$$

и поэтому образуют бесконечный набор законов сохранения для каждой из приведенных выше гамильтоновых систем.

Прежде чем доказывать теорему, следует сделать несколько замечаний. Хотя в сформулированном виде результат является весьма мощным, в нем содержится один неприятный дефект; а именно, мы должны предполагать, что можем на каждом шаге применять оператор рекурсии к K_{n-1} для получения K_n, т. е. доказывать, что K_{n-1} лежит в образе оператора $\mathcal{D}$. В большинстве известных к настоящему времени примеров это, кажется, всегда так, однако было бы замечательно получить общее доказательство этого факта. (Доказательство, приведенное в теореме 5.32, годится только для уравнения Кортевега — де Фриза.) Однако сейчас, за исключением некоторых частных случаев, это лучшее, что мы можем делать. Вторая проблема состоит в проверке независимости гамильтоновых функционалов $\mathcal{H}_n$; на практике это обычно легко увидеть, рассматривая старшие члены соответствующих эволюционных уравнений.

Само доказательство сводится к следующей технической лемме:

Лемма 7.25. *Пусть операторы $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ образуют гамильтонову пару и оператор $\mathcal{D}$ невырожден. И пусть P, Q, $R \in \mathcal{A}^q$ удовлетворяют условию*

$$\mathcal{E}P = \mathcal{D}Q, \quad \mathcal{E}Q = \mathcal{D}R. \tag{7.35}$$

Тогда если $P = \delta\mathcal{P}$, $Q = \delta\mathcal{Q}$ являются вариационными производными функционалов $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}$, то и $R = \delta\mathcal{R}$ для некоторого функционала $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$.

Прежде чем доказывать лемму, посмотрим, как из нее вытекает теорема. Положим для каждого $n \geqslant 0$ $K_n = \mathcal{D}Q_n$, где по предположению $Q_n \in \mathcal{A}^q$ — корректно определенный набор из q дифференциальных функций. По лемме если $Q_{n-1} = \delta\mathcal{H}_{n-1}$, $Q_n = \delta\mathcal{H}_n$ являются вариационными производными, то и $Q_{n+1} = \delta\mathcal{H}_{n+1}$ для некоторого функционала $\mathcal{H}_{n+1} \in \mathcal{F}$. Так как мы уже знаем, что $Q_0 = \delta\mathcal{H}_0$, $Q_1 = \delta\mathcal{H}_1$ имеют такой вид, то существование функционалов $\mathcal{H}_n$, $n \geqslant 0$, вытекает из простой индукции. Часть (i) доказана.

Часть (ii) следует из ч. (iii) и равенства (7.22), поэтому мы сосредоточимся на доказательстве ч. (iii). Ввиду равенства (7.4)

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathcal{D}} = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_m(\mathcal{H}_n)$$

и

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathcal{E}} = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{m+1}(\mathcal{H}_n),$$

откуда

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathcal{E}}.$$

Чтобы двигаться дальше, воспользуемся кососимметричностью скобки Пуассона. При $n < m$

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathcal{E}} = \{\mathcal{H}_{n+1}, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathcal{D}} = \ldots$$
$$\ldots = \{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_k\} = 0,$$

где k — целая часть числа $(m-n)/2$, и последняя скобка — это $\mathcal{D}$-пуассонова скобка при четном $m-n$ и $\mathcal{E}$-пуассонова скобка при нечетном $m-n$. Тем самым доказано равенство (7.34), и доказательство теоремы завершено. □

Доказательство леммы 7.25. Напомним, возвращаясь к выводу равенства (7.11) из тождества Якоби (7.3), что большое количество сокращений — результат того, что наборы P, Q, R предполагались вариационными производными функционалов и, следовательно, их производные Фреше были симметрическими операторами. Если мы отбросим это исходное предположение и проведем вычисление для произвольных наборов $P, Q, R \in \mathcal{A}^q$, то придем к тождеству вида

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}, \mathcal{D}; P, Q, R) = \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}; P, Q, R) + \mathcal{J}(\mathcal{D}, \mathcal{D}; P, Q, R),$$

где

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; P, Q, R) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{D}R}\int P \cdot \mathcal{E}Q\,dx + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{D}P}\int Q \cdot \mathcal{E}R\,dx +$$
$$+ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{D}Q}\int R \cdot \mathcal{E}P\,dx + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{E}R}\int P \cdot \mathcal{D}Q\,dx +$$
$$+ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{E}P}\int Q \cdot \mathcal{D}R\,dx + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathcal{E}Q}\int R \cdot \mathcal{D}P\,dx\Big\}.$$

$\mathcal{J}(\mathcal{D}, \mathcal{D}; P, Q, R)$ определяется формулой (7.30), а $\mathcal{L}$ — квадратичная форма билинейного выражения

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; P, Q, R) =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\{\mathcal{D}P \cdot (\mathsf{D}_Q - \mathsf{D}_Q^*)\mathcal{E}R + \mathcal{D}Q \cdot (\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*)\mathcal{E}P +$$
$$+ \mathcal{D}R \cdot (\mathsf{D}_P - \mathsf{D}_P^*)\mathcal{E}Q + \mathcal{E}P \cdot (\mathsf{D}_Q - \mathsf{D}_Q^*)\mathcal{D}R +$$
$$+ \mathcal{E}Q \cdot (\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*)\mathcal{D}P + \mathcal{E}R \cdot (\mathsf{D}_P - \mathsf{D}_P^*)\mathcal{D}Q\}\,dx.$$

У предыдущего тождества есть билинейный аналог

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; P, Q, R) = \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; P, Q, R) + \mathcal{J}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; P, Q, R); \tag{7.36}$$

это тождество выполняется для произвольных $P, Q, R \in \mathcal{A}$ и произвольных антисимметрических операторов $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. В частности, если $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ образуют гамильтонову пару, то член $\mathcal{J}$ в (7.36) обращается в нуль.

Заменим теперь P на $S = \delta\mathcal{S}$, R на $T = \delta\mathcal{T}$ в (7.36) и предположим, что P, Q, R связаны соотношениями (7.35). Так как Q, S и T являются вариационными производными функционалов, из теоремы 5.68, (7.36) и (7.31) следует, что

$$0 = \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; Q, S, T) = \mathcal{K}(\mathcal{D}, \mathcal{E}; Q, S, T). \tag{7.37}$$

Кроме того, с помощью соотношений (7.35) и антисимметричности операторов $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ находим (после перестановки членов)

$$\mathscr{K}(\mathscr{D}, \mathscr{E}; Q, S, T) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}P} \int S \cdot \mathscr{E}T\,dx + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}S} \int T \cdot \mathscr{E}P\,dx +$$
$$+ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}T} \int P \cdot \mathscr{E}S\,dx + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}R} \int S \cdot \mathscr{D}T\,dx +$$
$$+ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}S} \int T \cdot \mathscr{D}R\,dx + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}T} \int R \cdot \mathscr{D}S\,dx\Big\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{E}; P, S, T) + \mathscr{K}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; R, S, T)\}.$$

Так как $\mathscr{E}$ гамильтонов и P, S, T являются вариационными производными функционалов, то $\mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{E}; P, S, T)$ представляет собой левую часть тождества Якоби для $\mathscr{E}$ и поэтому обращается в нуль. Нам еще неизвестно, что R является вариационной производной некоторого функционала, поэтому мы не можем утверждать того же относительно $\mathscr{K}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; R, S, T)$. Однако ввиду (7.36), (7.37) и теоремы 5.68 (для S и T) имеем

$$0 = \mathscr{K}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; R, S, T) = \mathscr{L}(\mathscr{D}, \mathscr{D}; R, S, T) =$$
$$= \int \mathscr{D}T \cdot (\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*)\,\mathscr{D}S\,dx = -\int T \cdot \mathscr{D}(\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*)\,\mathscr{D}S\,dx.$$

Заметим, что оператор $\mathscr{D}(\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*)\mathscr{D}$ антисимметрический. Так как это тождество выполняется для произвольных вариационных производных $S = \delta\mathscr{S}$, $T = \delta\mathscr{T}$, то из предложения 5.64 и принципа подстановки (упр. 5.32) следует, что

$$\mathscr{D} \cdot (\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*) \cdot \mathscr{D} = 0.$$

И наконец, предположение о невырожденности оператора $\mathscr{D}$ позволяет нам заключить, что

$$\mathscr{D} \cdot (\mathsf{D}_R - \mathsf{D}_R^*) = 0.$$

Применив сопряжение, получаем

$$-(\mathsf{D}_R^* - \mathsf{D}_R) \cdot \mathscr{D} = 0.$$

Использовав еще раз невырожденность оператора $\mathscr{D}$, заключаем, что R удовлетворяет условию Гельмгольца $\mathsf{D}_R^* = \mathsf{D}_R$ и поэтому ввиду теоремы 5.68 является вариационной производной некоторого функционала. □

Операторы рекурсии

Мы видели, что для данной бигамильтоновой системы оператор $\mathscr{R} = \mathscr{E} \cdot \mathscr{D}^{-1}$, последовательно применяемый к исходному уравнению $K_0 = \mathscr{D}\delta\mathscr{H}_0$, порождает бесконечную последовательность обобщенных симметрий исходной системы (подчиняющихся техническим предположениям теоремы 7.24.) Пока еще не ясно, что $\mathscr{R}$ действительно является оператором рекурсии для системы в том смысле, что если $\mathbf{v}_Q$ — обобщенная симметрия, то и $\mathbf{v}_{\mathscr{R}Q}$ — обобщенная симметрия. Пока нам это известно только для симметрий вида $Q = K_n$ при некотором n. Чтобы доказать этот более общий результат, нам понадобится формула для инфинитезимального изменения самого гамильтонова оператора под действием гамильтонова потока.

Лемма 7.26. *Пусть* $u_t = K = \mathscr{D}\delta\mathscr{H}$ — *гамильтонова система эволюционных уравнений с соответствующим векторным полем* $\mathbf{v}_K = \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{H}}$. *Тогда*

$$\operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{H}}(\mathscr{D}) = \mathsf{D}_K \cdot \mathscr{D} + \mathscr{D} \cdot \mathsf{D}_K^*. \tag{7.38}$$

Доказательство. Положим $L = \delta\mathscr{H}$, т. е. $K = \mathscr{D}L$. Пусть $P = \delta\mathscr{P}$, $Q = \delta\mathscr{Q}$ — произвольные вариационные производные. В силу тождества Якоби для оператора $\mathscr{D}$ в виде (7.11) и равенств (7.7) и (5.41)

$$\begin{aligned}
\int [P \cdot \operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{H}}(\mathscr{D}) Q]\, dx &= \int [P \cdot \operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}(\mathscr{D}) L - Q \cdot \operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}(\mathscr{D}) L]\, dx = \\
&= \int \{P \cdot [\operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}(K) - \mathscr{D} \operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{Q}}(L)] - \\
&\quad - Q \cdot [\operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}(K) - \mathscr{D} \operatorname{pr} \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}(L)]\}\, dx = \\
&= \int \{P \cdot [\mathsf{D}_K(\mathscr{D}Q) - \mathscr{D}\mathsf{D}_L(\mathscr{D}Q)] - \\
&\quad - Q \cdot [\mathsf{D}_K(\mathscr{D}P) - \mathscr{D}\mathsf{D}_L(\mathscr{D}P)]\}\, dx = \\
&= \int [P \cdot \mathsf{D}_K(\mathscr{D}Q) - Q \cdot \mathsf{D}_K(\mathscr{D}P)]\, dx = \\
&= \int [P \cdot (\mathsf{D}_K \mathscr{D} + \mathscr{D}\mathsf{D}_K^*) Q]\, dx.
\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из того, что оператор $\mathscr{D}\mathsf{D}_L\mathscr{D}$ симметричен в силу антисимметричности $\mathscr{D}$, а D_L симметрический, так как $L = \delta\mathscr{H}$ — вариационная производная. Теперь требуемый результат следует из принципа подстановки. □

Теорема 7.27. *Пусть* $u_t = K = \mathscr{D}\delta\mathscr{H}_1 = \mathscr{E}\delta\mathscr{H}_0$ — *бигамильтонова система эволюционных уравнений. Тогда оператор* $\mathscr{R} = \mathscr{E}\cdot\mathscr{D}^{-1}$ *является оператором рекурсии для этой системы.*

Доказательство. Мы должны проверить инфинитезимальный критерий теоремы 5.30. С помощью предыдущей леммы имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_K(\mathscr{R}) &= \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_K(\mathscr{E})\cdot\mathscr{D}^{-1} - \mathscr{E}\cdot\mathscr{D}^{-1}\cdot\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_K(\mathscr{D})\cdot\mathscr{D}^{-1} = \\ &= (\mathbf{D}_K\mathscr{E} + \mathscr{E}\mathbf{D}_K^*)\cdot\mathscr{D}^{-1} - \mathscr{E}\cdot\mathscr{D}^{-1}(\mathbf{D}_K\mathscr{D} + \mathscr{D}\mathbf{D}_K^*)\mathscr{D}^{-1} = \\ &= \mathbf{D}_K\mathscr{R} - \mathscr{R}\mathbf{D}_K.\end{aligned}$$

Поэтому для решения u

$$(D_t - \mathbf{D}_K)\cdot\mathscr{R} = \mathscr{R}\cdot D_t + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_K(\mathscr{R}) - \mathbf{D}_K\cdot\mathscr{R} = \mathscr{R}\cdot(D_t - \mathbf{D}_K)$$

и (5.42) выполняется. □

Заметим, что в этой теореме мы не требуем, чтобы пара $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ была гамильтоновой; нам нужна только гамильтоновость каждого оператора. Таким образом, оператор рекурсии существует в более общих ситуациях. Однако без предположения о том, что пара $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ гамильтонова, не ясно, являются ли гамильтоновыми симметрии $\mathbf{v}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяемые рекурсией. Примеры такого явления до сих пор неизвестны.

Пример 7.28. *Уравнение Буссинеска,* которое мы записываем в виде

$$u_{tt} = \frac{1}{3}u_{xxxx} + \frac{4}{3}(u^2)_{xx},$$

возникает в модели распространения длинных волн в мелкой воде, связанной с окрестностью фронта волны (несмотря на то что оно допускает волны, бегущие в обоих направлениях!). Его можно преобразовать в эквивалентную эволюционную систему

$$u_t = v_x, \quad v_t = \frac{1}{3}u_{xxx} + \frac{8}{3}uu_x, \tag{7.39}$$

которая оказывается бигамильтоновой. Первую гамильтонову формулировку распознать нетрудно. Возьмем в качестве гамильтонова оператора

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix}$$

(он, очевидно, удовлетворяет тождеству Якоби, так как его коэффициенты постоянны), а в качестве гамильтонова функционала

$$\mathscr{H}_1[u,\ v] = \int \left(-\frac{1}{6} u_x^2 + \frac{4}{9} u^3 + \frac{1}{2} v^2 \right) dx.$$

Вторая гамильтонова структура не столь очевидна. Гамильтонов функционал имеет вид

$$\mathscr{H}_0[u,\ v] = \int \frac{1}{2} v\, dx,$$

а гамильтонов оператор равен

$$\mathscr{E} =$$

$$\begin{pmatrix} D_x^3 + 2uD_x + u_x & 3vD_x + 2v_x \\ 3vD_x + v_x & \frac{1}{3}D_x^5 + \frac{5}{3}(uD_x^3 + D_x^3 \cdot u) - (u_{xx}D_x + D_x \cdot u_{xx}) + \frac{16}{3}uD_x \cdot u \end{pmatrix}$$

Даже доказательство того, что оператор $\mathscr{E}$ гамильтонов, представляет собой довольно трудоемкое вычисление. Соответствующий два-вектор имеет вид

$$\Theta_{\mathscr{E}} = \frac{1}{2} \int \Big\{ \theta \wedge \theta_{xxx} + 2u\theta \wedge \theta_x + 2v\theta \wedge \zeta_x - 4v\theta_x \wedge \zeta +$$
$$+ \frac{1}{3} \zeta \wedge \zeta_{xxxxx} + \frac{4}{3} u\zeta \wedge \zeta_{xxx} - 2u\zeta_x \wedge \zeta_{xx} + \frac{16}{3} u^2 \zeta \wedge \zeta_x \Big\}\, dx,$$

где $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \zeta)$, а θ и τ — базисные один-векторы, отвечающие u и v соответственно. Вычисляя левую часть равенства (7.18) (для $\mathscr{E}$), будем использовать то, что

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\boldsymbol{\theta}}(u) = \theta_{xxx} + 2u\theta_x + u_x\theta + 3v\zeta_x + 2v_x\zeta,$$

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\boldsymbol{\theta}}(v) = 3v\theta_x + v_x\theta + \frac{1}{3}\zeta_{xxxxx} + \frac{10}{3}u\zeta_{xxx} + 5u_x\zeta_{xx} +$$
$$+ \left(3u_{xx} + \frac{16}{3}u^2\right)\zeta_x + \left(\frac{2}{3}u_{xxx} + \frac{16}{3}uu_x\right)\zeta,$$

а также неоднократное интегрирование по частям — быть может, читателю захочется проверить на этом примере свою сноровку! Доказательство того, что $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ образуют гамильтонову пару, несложно; так как коэффициенты оператора $\mathscr{D}$ постоянны, то $\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{E}\theta}(\Theta_{\mathscr{D}}) = 0$, и нам нужно проверить только, что

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\boldsymbol{\theta}}(\Theta_{\mathscr{E}}) = 0, \text{ где } \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\boldsymbol{\theta}}(u) = \zeta_x, \quad \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\boldsymbol{\theta}}(v) = \theta_x.$$

Таким образом, для уравнения Буссинеска имеется целая иерархия законов сохранения и коммутирующих потоков. Оператор рекурсии имеет вид

$$\mathcal{R} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{D}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 3v + 2v_x D_x^{-1} & D_x^2 + 2u + u_x D_x^{-1} \\ \frac{1}{3} D_x^4 + \frac{10}{3} u D_x^2 + 5u_x D_x + 3u_{xx} + \frac{16}{3} u^2 + \left(\frac{1}{3} u_{xxx} + \frac{16}{3} u u_x\right) D_x^{-1} & 3v + v_x D_x^{-1} \end{pmatrix}$$

и применяя $\mathcal{R}$ последовательно к правой части равенств (7.39), мы будем получать симметрии. На первом шаге этой рекурсии мы получаем поток

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \mathcal{E}\delta\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}\delta\mathcal{H}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} u_{xxxxx} + \frac{10}{3} u u_{xxx} + \frac{25}{3} u_x u_{xx} + \frac{20}{3} u^2 u_x + 5 v v_x \\ \frac{1}{3} v_{xxxxx} + \frac{10}{3} u v_{xxx} + 5 u_x v_{xx} + \frac{10}{3} u_{xx} v_x + \frac{5}{3} u_{xxx} v + \frac{20}{3} u^2 v_x + \frac{40}{3} u u_x v \end{pmatrix}$$

со следующим законом сохранения:

$$\mathcal{H}_2[u, v] = \int \left(\frac{1}{3} u_{xx} v_{xx} + \frac{10}{3} u u_{xx} v + \frac{5}{2} u_x^2 v + \frac{20}{9} u^3 v + \frac{5}{6} v^3 \right) dx.$$

С другой стороны, можно начать с гамильтоновой симметрии сдвига

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \mathcal{E}\delta\hat{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{D}\delta\hat{\mathcal{H}}_1,$$

где оба функционала

$$\hat{\mathcal{H}}_0[u, v] = \int u\, dx, \qquad \hat{\mathcal{H}}_1[u, v] = \int uv\, dx$$

сохраняются. По теореме 7.27 применение $\mathcal{R}$ к этой симметрии приводит ко *второй* иерархии коммутирующих потоков и соответствующих законов сохранения, первый из которых имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \mathcal{E}\delta\hat{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{D}\delta\hat{\mathcal{H}}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{xxx} + 4 u v_x + 4 u_x v \\ \frac{1}{3} u_{xxxxx} + 4 u u_{xxx} + 8 u_x u_{xx} + \frac{32}{3} u^2 u_x + 4 v v_x \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{\mathscr{H}}_2[u,\ v] = \int \left(\frac{1}{6} u_{xx}^2 - 2uu_x^2 + \frac{8}{9} u^4 + 2uv^2 - \frac{1}{2} v_x^2 \right) dx$$

— еще один закон сохранения. (На каждом шаге необходимо быть уверенным в том, что оператор $\mathscr{D}$ обратим, но это доказывается аналогично случаю уравнения Кортевега — де Фриза.)

ЗАМЕЧАНИЯ

Хотя гамильтоновы системы обыкновенных дифференциальных уравнений имели первостепенное значение как в классической, так и в квантовой механике, распространение идей и техники этой теории на бесконечномерные системы, управляемые системами эволюционных уравнений, обретало зрелость очень медленно. Отставание объяснялось главным образом настойчивыми попытками использовать для бесконечномерных систем канонические координаты, существующие в конечномерном случае благодаря теореме Дарбу; однако для представляющих интерес систем эволюционных уравнений таких координат нет, и поэтому для работы необходимо предварительное овладение общим понятием пуассоновой структуры. (Бесконечномерный вариант теоремы Дарбу, доказанный Вейнстейном (Weinstein [1]), кажется, в данном контексте неприменим.)

Корректное описание гамильтоновой структуры для эволюционных уравнений основывалось на двух замечательных результатах. Арнольд [1], [2] показал, что уравнения Эйлера для потока идеальной жидкости можно рассматривать как гамильтонову систему на бесконечномерной группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем, построенную с помощью скобки Ли — Пуассона (как обобщение на соответствующую бесконечномерную алгебру Ли). Арнольд выписал свою гамильтонову структуру в лагранжевых (подвижных) координатах; эйлеров вариант был впервые открыт Кузнецовым и Михайловым [1]. Вариант, представленный здесь, включая вывод законов сохранения, основан на работах Olver [5] и Ибрагимов [1; § 25.3]. (Приведенная у нас скобка Пуассона, хотя и является формально правильной, не может учесть граничные эффекты, и при обсуждении решений на ограниченных областях нуждается в незначительной модификации; см. обсуждение этого вопроса в работе Lewis, Marsden, Montgomery, Ratiu [1].) Затем в статье Marsden, Weinstein [2] было показано, что лагранжева и эйлерова скобки Пуассона — одно и то же. Метод Арнольда был с большим успехом применен к определению гамильтоновых структур многих систем дифференциальных уравнений, возникающих в механике жидко-