жидкостей; см. упр. 7.11. Понятие бигамильтоновой системы всплыло также недавно в работах по бесконечномерным гамильтоновым системам, в которых семейства законов сохранения строятся с помощью подходящей рекурсивной процедуры; см. Hojman, Harleston [1] и Crampin [1], а также приведенные там ссылки. Однако единственный известный мне к настоящему времени содержательный пример бесконечномерной бигамильтоновой системы — это цепочка Тоды, которая исследована в статье Leo M., Leo R. A., Soliani, Solombrino, Mancarella [1].

Доказательство основной теоремы 7.24 о бигамильтоновых системах основано на доказательстве Гельфанда и Дорфмана [1]. Неприятное предположение технического характера о том, что оператор $\mathcal{D}$ обратим на каждом шаге, не всегда выполняется. Однако для оператора $\mathcal{D}$ с постоянными коэффициентами это предположение можно отбросить; доказательство опирается на точность бесконечномерного обобщения комплекса, построенного в работе Lichnerowicz [1], основанного на скобке Схоутена. Гипотезу относительно более общей ситуации можно найти в статье Olver [10], а доказательство для случая постоянных коэффициентов — в моей готовящейся к выходу статье.

УПРАЖНЕНИЯ

*7.1. Пусть $p = q = 1$. Найдите все гамильтоновы операторы вида

$$D_x^3 + PD_x + Q,$$

где P и Q — дифференциальные функции. (Рассмотрите сначала P, Q, зависящие только от u и u_x.) (Гельфанд, Дорфман [1].)

7.2. Пусть $p = 1$, $q = 3$. Обозначим зависимые переменные через u, v, w. Пусть

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_x \\ 0 & D_x & 0 \\ D_x & 0 & D_x^3 + 2uD_x + u_x \end{pmatrix}.$$

Докажите, что оператор $\mathcal{D}$ гамильтонов. (Adler [1].)

7.3. Докажите, что уравнения Максвелла в физическом виде упр. 2.16(а) составляют гамильтонову систему со скобкой Пуассона

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = \int \left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta E} \cdot \nabla \times \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta B} - \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta E} \cdot \nabla \times \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta B} \right) dx.$$

Обсудите симметрии и законы сохранения. (См. также упр. 4.6 и 5.15.) (Born, Infeld [1], Marsden [1].)

7.4. Выведите найденные в примере 7.17 законы сохранения $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{P}_\beta$ для двумерных уравнений Эйлера непосредственно из закона сохранения энергии с помощью предложения 5.48. (Ибрагимов [1].)

*7.5. Докажите, что трехмерные уравнения Эйлера для потока несжимаемой жидкости, переписанные относительно вихря $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, образуют гамильтонову систему по отношению к оператору $\mathscr{D}$, где

$$\mathscr{D}P = \omega \cdot \nabla P - (\nabla\omega)\nabla \times P$$

(∇ обозначает полный градиент, ротор или дивергенцию). Найдите законы сохранения, отвечающие известным группам симметрий. Докажите, что единственный нетривиальный отмеченный функционал — это «полная завихренность» $\mathscr{C} = \int (\mathbf{u}\cdot\omega)\,d\mathbf{x}$. (Olver [5]; относительно n-мерного случая см. Serre [1].)

7.6. Пусть $\mathscr{L}[u]$ — вариационная задача с уравнениями Эйлера — Лагранжа $\delta\mathscr{L} = 0$. Предположим, что поле $\mathbf{v}_Q$ порождает группу вариационных симметрий с законом сохранения $\operatorname{Div} P = 0$. Докажите, что соответствующие динамические гамильтоновы уравнения $u_t = \mathscr{D}\cdot\delta\mathscr{L}$ имеют соответствующий закон сохранения, если и только если поле $\mathbf{v}_Q = \hat{\mathbf{v}}_{\mathscr{P}}$ гамильтоново относительно данной скобки Пуассона.

7.7. Динамические уравнения упругости имеют вид

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{p} D_i\left(\frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha}\right), \quad \alpha = 1, \ldots q,$$

где $W(x, \nabla u)$ — функция высвобожденной энергии, ср. пример 4.32. Докажите, что эти уравнения можно привести к гамильтонову виду, приняв энергию

$$\mathscr{H} = \int \left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + W(x, \nabla u)\right] dx$$

за гамильтониан, а u, $v = u_t$ — за канонические переменные. Обсудите законы сохранения этой системы в свете упр. 7.6 и примера 4.32. (Fletcher D. C. [1], Marsden, Hyghes [1; § 5.5].)

7.8. (a) Пусть $\mathscr{D}$: $\mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^q$ — дифференциальный оператор. Докажите, что любой функционал $\mathscr{C}[u]$, удовлетворяющий условию $\mathscr{D}^*\cdot\delta\mathscr{C} = 0$, является законом сохранения для любой эволюционной системы вида $u_t = \mathscr{D}Q$ для любого $Q \in \mathscr{A}^q$.

(b) Докажите, что любое эволюционное уравнение вида $u_t = D_x^m Q$, где $x, u \in \mathbb{R}$, всегда сохраняет первые $m+1$ моментов $\mathscr{M}_j = \int x^j u\,dx$, $j = 0, \ldots, m$, любого решения.

7.9. Докажите, что операторы

$$\mathscr{D} = D_x, \quad \mathscr{E} = D_x^3 + \frac{2}{3}D_x\cdot uD_x^{-1}\cdot uD_x$$

составляют гамильтонову пару, превращающую модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза $u_t = u_{xxx} + u^2u_x$ в бигамильтонову систему. Найдите оператор рекурсии и первые несколько симметрий. Как они связаны с преобразованием Миуры уравнения Кортевега—де Фриза из упр. 5.11? (Magri [2].)

7.10. Уравнение Гарри Дима имеет вид $u_t = D_x^3(u^{-1/2})$. Докажите, что это бигамильтонова система при $\mathscr{D} = 2uD_x + u_x$, $\mathscr{E} = D_x^3$. Обсудите отмеченные функционалы, симметрии и законы сохранения для этого уравнения. (Magri [1]; в книге Ибрагимов [1] показано, как можно преобразовать это уравнение Кортевега — де Фриза.)

7.11. Рассмотрим три системы уравнений, близкие к нелинейному уравнению Шредингера:

$$u_t + u_{xx} = 2(uu_x + v_x), \qquad -v_t + v_{xx} = 2(uv)_x,$$

$$\tilde{u}''_t + \tilde{u}'_{xx} = u_x^2 + 2\tilde{v}_x, \qquad -\tilde{v}_t + \tilde{v}_{xx} = 2\tilde{u}_x\tilde{v}_x,$$

$$\hat{u}_t + \hat{u}_{xx} = 2\hat{u}^2\hat{v}, \qquad -\hat{v}_t + \hat{v}_{xx} = 2\hat{u}\hat{v}^2.$$

Найдите замены, связывающие решения этих систем. Проверьте, что первая из них является тригамильтоновой, т. е. ее можно записать в гамильтоновом виде, пользуясь любым из трех гамильтоновых операторов

$$\mathcal{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 2D_x & D_x \cdot u - D_x^2 \\ uD_x + D_x^2 & 2vD_x + v_x \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 4uD_x + 2u_x & 4vD_x + 2v_x + D_x(D_x - u)^2 \\ 4vD_x + 2v_x + (D_x + u)^2 D_x & (D_x + u)(2vD_x + v_x) - (2vD_x + v_x)(D_x - u) \end{pmatrix},$$

и любые два из этих операторов составляют гамильтонову пару. Обсудите гамильтоновость остальных двух систем (см. Whitham, [1], Broer [1], Kupershmidt [2], Михайлов, Шабат, Ямнов [2]).

7.12. (a) Докажите, что производная Ли симметрического (соответственно антисимметрического) матричного дифференциального оператора $\mathcal{D}$ по эволюционному векторному полю $\mathbf{v}_Q$ $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\mathcal{D})$ симметрична (антисимметрична).

(b) Докажите непосредственно, что левая часть тождества (7.11) является кососимметричной трилинейной функцией от P, Q, R.

7.13. Докажите, что если $\mathcal{D}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ и $\mathcal{E}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — ненулевые скалярные дифференциальные операторы, то $\mathcal{E} \circ \mathcal{D}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — тоже ненулевой дифференциальный оператор. Выведите отсюда, что любой скалярный дифференциальный оператор невырожден в смысле определения 7.23.

***7.14.** Пусть $\mathcal{D}\colon \mathcal{A}^r \to \mathcal{A}^r$ — дифференциальный оператор, а $\mathcal{K}^* = \{Q \in \mathcal{A}^s\colon \mathcal{D}^*Q = 0\}$ — ядро сопряженного к нему оператора. Докажите, что если $\mathcal{K}^*$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, то оператор $\mathcal{D}$ невырожден в смысле определения 7.23. Сколько отмеченных функционалов имеется у невырожденного гамильтонова оператора?