где

$$\hat{\mathscr{H}}_2[u, v] = \int \left(\frac{1}{6} u_{xx}^2 - 2uu_x^2 + \frac{8}{9} u^4 + 2uv^2 - \frac{1}{2} v_x^2\right) dx$$

— еще один закон сохранения. (На каждом шаге необходимо быть уверенным в том, что оператор $\mathscr{D}$ обратим, но это доказывается аналогично случаю уравнения Кортевега — де Фриза.)

ЗАМЕЧАНИЯ

Хотя гамильтоновы системы обыкновенных дифференциальных уравнений имели первостепенное значение как в классической, так и в квантовой механике, распространение идей и техники этой теории на бесконечномерные системы, управляемые системами эволюционных уравнений, обретало зрелость очень медленно. Отставание объяснялось главным образом настойчивыми попытками использовать для бесконечномерных систем канонические координаты, существующие в конечномерном случае благодаря теореме Дарбу; однако для представляющих интерес систем эволюционных уравнений таких координат нет, и поэтому для работы необходимо предварительное овладение общим понятием пуассоновой структуры. (Бесконечномерный вариант теоремы Дарбу, доказанный Вейнстейном (Weinstein [1]), кажется, в данном контексте неприменим.)

Корректное описание гамильтоновой структуры для эволюционных уравнений основывалось на двух замечательных результатах. Арнольд [1], [2] показал, что уравнения Эйлера для потока идеальной жидкости можно рассматривать как гамильтонову систему на бесконечномерной группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем, построенную с помощью скобки Ли — Пуассона (как обобщение на соответствующую бесконечномерную алгебру Ли). Арнольд выписал свою гамильтонову структуру в лагранжевых (подвижных) координатах; эйлеров вариант был впервые открыт Кузнецовым и Михайловым [1]. Вариант, представленный здесь, включая вывод законов сохранения, основан на работах Olver [5] и Ибрагимов [1; § 25.3]. (Приведенная у нас скобка Пуассона, хотя и является формально правильной, не может учесть граничные эффекты, и при обсуждении решений на ограниченных областях нуждается в незначительной модификации; см. обсуждение этого вопроса в работе Lewis, Marsden, Montgomery, Ratiu [1].) Затем в статье Marsden, Weinstein [2] было показано, что лагранжева и эйлерова скобки Пуассона — одно и то же. Метод Арнольда был с большим успехом применен к определению гамильтоновых структур многих систем дифференциальных уравнений, возникающих в механике жидкости, физике плазмы и т. д. С помощью этих гамильтоновых структур доказывались новые результаты о нелинейной устойчивости этих сложных систем; см. Holm, Marsden, Ratiu, Weinstein [1] и дальнейшие ссылки в этой работе.

Вторым важным толчком в развитии общей теории послужило открытие Гарднером (Gardner [1]) того, что уравнение Кортевега — де Фриза можно записать в виде вполне интегрируемой гамильтоновой системы. Дальнейшее развитие эта идея получила в работах Захарова и Фаддеева [1], Гельфанда и Дикого [1], [2] и Лакса (Lax [3]). Адлер (Adler [1]) показал, что (первую) гамильтонову структуру уравнения Кортевега — де Фриза можно рассматривать как формальную структуру Ли — Пуассона на бесконечномерной алгебре Ли псевдодифференциальных операторов на вещественной прямой, и распространил эти результаты на более общие солитонные уравнения, обладающие представлением Лакса, включая уравнение Буссинеска из примера 7.28. (См. Lax [1].)

Ранние варианты теории гамильтоновых систем эволюционных уравнений были ограничены настойчивым введением канонических координат; типичный пример этого подхода можно найти в работе Broer [1]. Общее понятие гамильтоновой системы эволюционных уравнений впервые прояснилось в работах: Magri [1], Виноградов [2], Kupershmidt [1] и Манин [1]. Дальнейшее развитие, включая упрощенную технику проверки тождества Якоби, теория получила в работах Гельфанда и Дорфмана [1], Олвера (Olver [4]) и Космана-Шварцбаха (Kosmann-Schwarzbach [3]). Приведенные у нас методы вычислений, основанные на функциональных мультивекторах, представляют собой слегка модифицированный вариант методов второй из этих работ. Оператор $\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{\mathscr{D}\theta}$ в (7.18) — то же самое, что скобка Схоутена, где два-вектор Θ определяет скобку Пуассона; такой подход нашел развитие у Магри (Magri [1]) и Гельфанда и Дорфмана [1]. (Конечномерный вариант этой скобки можно найти в упр. 6.20, а ее общий бесконечномерный вид — в работе Olver [10].)

Основная теорема о бигамильтоновых структурах принадлежит Магри (Magri [1], [2]), который также первым опубликовал вторую гамильтонову структуру для уравнения Кортевега — де Фриза и других. Его метод получил развитие в работах Гельфанда и Дорфмана [1], [2] и Фухстейнера и Фокаса (Fuchssteiner, Fokas [1]). Вторые гамильтоновы структуры в других солитонных уравнениях были обнаружены Адлером (Adler [1]) и Гельфандом и Диким [3] и получили дальнейшее развитие в работе Kupershmidt, Wilson [1]. Недавно Купершмидт [2] обнаружил «тригамильтонову» систему, возникающую в механике жидкостей; см. упр. 7.11. Понятие бигамильтоновой системы всплыло также недавно в работах по бесконечномерным гамильтоновым системам, в которых семейства законов сохранения строятся с помощью подходящей рекурсивной процедуры; см. Hojman, Harleston [1] и Crampin [1], а также приведенные там ссылки. Однако единственный известный мне к настоящему времени содержательный пример бесконечномерной бигамильтоновой системы — это цепочка Тоды, которая исследована в статье Leo M., Leo R. A., Soliani, Solombrino, Mancarella [1].

Доказательство основной теоремы 7.24 о бигамильтоновых системах основано на доказательстве Гельфанда и Дорфмана [1]. Неприятное предположение технического характера о том, что оператор $\mathcal{D}$ обратим на каждом шаге, не всегда выполняется. Однако для оператора $\mathcal{D}$ с постоянными коэффициентами это предположение можно отбросить; доказательство опирается на точность бесконечномерного обобщения комплекса, построенного в работе Lichnerowicz [1], основанного на скобке Схоутена. Гипотезу относительно более общей ситуации можно найти в статье Olver [10], а доказательство для случая постоянных коэффициентов — в моей готовящейся к выходу статье.

УПРАЖНЕНИЯ

***7.1.** Пусть $p = q = 1$. Найдите все гамильтоновы операторы вида

$$D_x^3 + PD_x + Q,$$

где P и Q — дифференциальные функции. (Рассмотрите сначала P, Q, зависящие только от u и u_x.) (Гельфанд, Дорфман [1].)

7.2. Пусть $p = 1$, $q = 3$. Обозначим зависимые переменные через u, v, w. Пусть

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_x \\ 0 & D_x & 0 \\ D_x & 0 & D_x^3 + 2uD_x + u_x \end{pmatrix}.$$

Докажите, что оператор $\mathcal{D}$ гамильтонов. (Adler [1].)

7.3. Докажите, что уравнения Максвелла в физическом виде упр. 2.16(a) составляют гамильтонову систему со скобкой Пуассона

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta E} \cdot \nabla \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta B} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta E} \cdot \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta B} \right) dx.$$

Обсудите симметрии и законы сохранения. (См. также упр. 4.6 и 5.15.) (Born, Infeld [1], Marsden [1].)

7.4. Выведите найденные в примере 7.17 законы сохранения $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{P}_\beta$ для двумерных уравнений Эйлера непосредственно из закона сохранения энергии с помощью предложения 5.48. (Ибрагимов [1].)

***7.5.** Докажите, что трехмерные уравнения Эйлера для потока несжимаемой жидкости, переписанные относительно вихря $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, образуют