Приложение II

Метод сдвига аргумента и топология интегрируемых гамильтоновых систем

А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко

В этом приложении изложены некоторые конструкции, дополняющие основной текст книги и возникающие в теории вполне интегрируемых гамильтоновых систем: метод сдвига аргумента, согласованные скобки Пуассона, топологические инварианты интегрируемых гамильтоновых систем, перестройки торов Лиувилля. Некоторые другие вопросы, связанные с интегрированием гамильтоновых систем в явном виде, см., в частности, в работах С. П. Новикова и его учеников [1].

Начнем с хорошо известного примера гамильтоновой системы, описывающей динамику многомерного твердого тела, закрепленного в центре масс:

$$\dot{X} = [X, \Omega], \tag{1}$$

здесь X, Ω — кососимметрические матрицы, связанные соотношением $X = B\Omega + \Omega B$, где $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ — тензор инерции твердого тела. Уравнения (1) иногда называются в литературе уравнениями Эйлера — Арнольда. В трехмерном случае они совпадают с классическими уравнениями Эйлера, в многомерном случае многие важные их свойства были изучены В. И. Арнольдом (см. [2], [3]). С. В. Манаковым было установлено [4], что система (1) может быть записана в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{d}{dt}(X + \lambda B^2) = [X + \lambda B^2, \Omega + \lambda B],$$

из чего сразу следует, что функции $\mathrm{Tr}(X + \lambda B^2)^k$ являются первыми интегралами данной системы. Инволютивность этого набора функций относительно стандартной скобки Пуассона — Ли и полная интегрируемость системы (1) вытекают из следующей общей конструкции, предложенной А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [5] и получившей название «метод сдвига аргумента». Пусть G — произвольная конечномерная алгебра Ли, G^* — двойственное пространство, f и g — инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли G, $a \in G^*$ — произвольный фиксированный элемент. Тогда функции $f_{\lambda, a}(x) = f(x + \lambda a)$ и

$g_{\mu, a}(x) = g(x+\mu a)$ находятся в инволюции при любых λ, $\mu \in \mathbb{R}$ относительно скобки Пуассона — Ли на G^* (см. [5], [6]).

Иногда ковектор a, на который производится сдвиг, можно брать из некоторого большего пространства, содержащего G^*, как это и делается в случае твердого тела (см. выше). А именно, справедливо

Предложение 1. *Пусть алгебра Ли H вложена в алгебру Ли G так, что $G = H \oplus V$, причем $[H, V] \subset V$, $[V, V] \subset H$.* Пусть *$G^* = H^* \oplus V^*$ — двойственное разложение, $a \in V^*$ — произвольный элемент, f и g — инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли G. Тогда ограничения функций $f(x+\lambda a)$ и $g(x+\mu a)$ на H^* находятся в инволюции относительно скобки Пуассона — Ли на H^*.*

Сразу же возникает вопрос, сколько функционально независимых функций в инволюции можно получить описанным способом. Рассмотрим сначала случай полупростой алгебры Ли G. Как обычно в этом случае, отождествим G и G^* с помощью формы Киллинга. Будем говорить, что инволютивное семейство функций полно на G^*, если из него можно выбрать $(1/2)(\dim G + \operatorname{ind} G)$ функционально независимых функций.

Теорема 1 (см. [5]). (а) *Пусть a — регулярный элемент полупростой алгебры Ли G. Тогда инволютивное семейство сдвигов инвариантов $\{f(x+\lambda a) \mid f \in I(G),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ полно на G^*.*

(б) *Пусть H — нормальная вещественная подалгебра, а G — компактная вещественная форма полупростой алгебры Ли $G^{\mathbb{C}}$. Рассмотрим ортогональное разложение $G = H \oplus V$. Пусть $a \in V$ — регулярный элемент. Тогда инволютивное семейство функций $\{f(h+\lambda a) \mid f \in I(G),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ полно на H.*

Отметим, что следствием второй части этой теоремы является полная интегрируемость уравнений движения n-мерного твердого тела (I). Рассмотрим подробнее гамильтоновы системы на полупростых алгебрах Ли, интегрируемые в рамках метода сдвига аргумента. Любой квадратичный гамильтониан $h(x)$ на двойственном пространстве G^* алгебры Ли G удобно задавать с помощью самосопряженного оператора $\varphi\colon G^* \to G$ так, что $h(x) = (1/2)(\varphi(x), x)$. В случае полупростой алгебры Ли рассмотрим следующие семейства операторов. Пусть $a \in G$ — регулярный элемент, K — подалгебра Картана в G, содержащая a, $b \in K$ — произвольный элемент и $D\colon K \to K$ — произвольный самосопряженный оператор. Положим $\varphi_{a,b,D}(x) = \operatorname{ad}_b \operatorname{ad}_a^{-1} x_1 + Dx_2$, где $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K^{\perp}$, $x_2 \in K$, $\operatorname{ad}_a^{-1}\colon K^{\perp} \to K^{\perp}$ — корректно определенный в силу регулярности элемента a оператор. Операторы $\varphi_{a,b,D}$ являются частным случаем общих секционных операторов, введенных А. Т. Фоменко в [7].

В случае когда $G = H \oplus V$, H — нормальная вещественная подалгебра алгебры Ли $G^{\mathbb{C}}$, определим самосопряженный оператор $\varphi_{a,b}$: $H \to H$ по формуле $\varphi_{a,b}(h) = \mathrm{ad}_a^{-1} \mathrm{ad}_b h$, где $a \in V$ — регулярный элемент, лежащий в подалгебре Картана K, $b \in K$.

Теорема 2 (см. [5]). (а) *Функции* $f(x + \lambda a)$, где $f \in I(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *являются первыми интегралами гамильтоновой системы*

$$\dot{x} = [\varphi_{a,b,D}(x),\ x],\quad x \in G. \tag{2}$$

(б) *Функции* $f(h + \lambda a)$, *где* $h \in H \subset G$, $f \in I(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *являются первыми интегралами гамильтоновой системы*

$$\dot{h} = [\varphi_{a,b}(h),\ h],\quad h \in H. \tag{3}$$

Из теорем 1 и 2 автоматически вытекает

Следствие. *Гамильтоновы системы* (2) *и* (3) *вполне интегрируемы по Лиувиллю на орбитах общего положения.*

Отметим, что система (1), описывающая динамику n-мерного твердого тела, является частным случаем системы (3). Достаточно положить $H = \mathrm{so}(n)$, $G = \mathrm{sl}(n)$, $a = B^2 = \mathrm{diag}(b_1^2, \ldots$ $\ldots, b_n^2)$, $b = B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$.

Перечисленные результаты относятся в основном к орбитам общего положения, случай сингулярных орбит требует отдельного изучения. Скажем, что инволютивное семейство функций полно на фиксированной орбите коприсоединенного представления $O(x) \subset G^*$, если из него можно выбрать $(1/2) \dim O(x)$ функций, которые функционально независимы на этой орбите.

Теорема 3 ([8], [9]). *Пусть G — полупростая алгебра Ли, $x \in G$ — полупростой сингулярный элемент. Тогда найдется регулярный элемент $a \in G$, такой, что ограничение инволютивного семейства сдвигов инвариантов $\{f(x + \lambda a)\}$ на сингулярную орбиту $O(x)$ полно на этой орбите.*

Отметим связь этой теоремы с интегрируемостью геодезических потоков на компактных симметрических пространствах. Пусть компактная группа Ли $\mathfrak{G}$ действует на симметрическом пространстве $M = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. Это действие задает естественное отображение момента F: $T^*M \to G^*$. Пусть $H(x)$ — положительно определенный квадратичный гамильтониан на $G = G^*$. Тогда функция $\tilde{H} = H \circ F$ при фиксированном $\xi \in M$ квадратична и положительно определена на $T^*_\xi M$. Следовательно, она задает некоторую риманову метрику на симметрическом пространстве M, отличную, вообще говоря, от стандартной (стандартной метрике на M отвечает функция $H(x) = (1/2)(x, x)$, где $(\ ,\ )$ — форма Киллинга). Если $f_1, \ldots, f_s$ — коммутирующие интегралы уравнений Эйлера $\dot{x} = [dH(x), x]$ на G, то функции $f_1 \circ F, \ldots, f_s \circ F$ являются коммутирующими интегралами геодезического потока на T^*M, отвечающего построенной метрике. Для полной интегрируемости этого потока достаточно, чтобы функции $f_1, \ldots, f_s$ составляли полное инволютивное семейство почти на всех орбитах, содержащихся в образе отображения момента. Эти орбиты, как правило, сингулярны (например, в случае $M = S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$) и полупросты в силу компактности группы Ли $\mathfrak{G}$. Таким образом, из теоремы 3 вытекает

Теорема 4 ([9]). *Пусть $M = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ — компактное симметрическое пространство. Пусть $H(x) = (1/2)(\varphi_{a,b,D}(x), x)$ — положительно определенный квадратичный гамильтониан на G* (см. выше). *Тогда геодезический поток на T^*M, отвечающий метрике $H \circ F$, вполне интегрируем.*

Для стандартной метрики на $M = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ интегрируемость была доказана в [10].

Метод сдвига аргумента и его различные модификации были применены для более общих алгебр Ли в большом цикле работ А. В. Беляева, А. В. Болсинова, А. В. Браилова, Ле Нгок Тьеуена, Т. А. Певцовой, Т. Ратью, В. В. Трофимова, К. Шваи (см. обзор Трофимова и Фоменко [11]).

В случае произвольной конечномерной алгебры Ли G семейство сдвигов инвариантов не образует, вообще говоря, полного набора на G^*, более того, оно может оказаться тривиальным, например, если алгебра Ли G фробениусова, т. е. орбиты общего положения представления Ad^* открыты. Отметим, что различные конструкции, связанные с фробениусовыми алгебрами, изучались в работах Браилова [12], Ле Нгок Тьеуена [13], Трофимова [14], Элашвили [15]. В частности, Браиловым была доказана формула $\mathrm{ind}\, G \otimes A = \mathrm{ind}\, G \cdot \dim A$, где G — произвольная конечномерная алгебра Ли, а A — коммутативная ассоциативная фробениусова алгебра с единицей.

Возвращаясь к методу сдвига аргумента, отметим также, что легко привести примеры, показывающие, что из полноты семейства $\{f(x + \lambda a)\}$ на орбитах общего положения не следует его полнота на сингулярных орбитах.

Ниже под семейством сдвигов инвариантов мы будем понимать семейство однородных многочленов, полученных при разложении в ряд локальных инвариантов коприсоединенного представления в регулярной точке $a \in G^*$. Это изменение вызвано тем, что инварианты в общем случае могут быть глобально не определены. Семейство таких многочленов обозначим через $\mathcal{F}_a$. Итак, пусть G — произвольная конечномерная комплексная алгебра Ли. Для любого $x \in G^*$ положим $\operatorname{Ann}(x) = \{\xi \in G \mid \operatorname{ad}_\xi^* x = 0\}$. Напомним, что $\operatorname{ind} G = \min\limits_{x \in G^*} \dim \operatorname{Ann}(x)$, и рассмотрим множество сингулярных элементов $S = \{y \in G^* \mid \dim \operatorname{Ann}(y) > \operatorname{ind} G\}$ в G^*.

Теорема 5 (критерий полноты) (см. [16]). *Пусть $a \in G^*$ — регулярный элемент. Инволютивное семейство $\mathcal{F}_a$ полно на G^* тогда и только тогда, когда* $\operatorname{codim} S \geqslant 2$.

Теорема 6 (см. [16]). *Пусть* $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ *и $x \in G^*$ — сингулярный элемент, удовлетворяющий дополнительному условию* $\operatorname{ind} \operatorname{Ann}(x) = \operatorname{ind} G$. *Тогда найдется регулярный элемент $a \in G^*$, такой, что инволютивное семейство $\mathcal{F}_a$ полно на сингулярной орбите $O(x)$.*

Если алгебра Ли G полупроста, то $\operatorname{codim} S = 3$ и, кроме того, условие $\operatorname{ind} \operatorname{Ann}(x) = \operatorname{ind} G$ выполнено для всех полупростых элементов $x \in G$, поэтому теоремы 1 и 3 могут рассматриваться как следствия общих утверждений теорем 5 и 6. Отметим еще два следствия.

Следствие 1. *Пусть K — комплексная классическая простая алгебра Ли, $\varphi\colon K \to \operatorname{End}(V)$ — неприводимое представление, $G = K + V$ — полупрямая сумма, $a \in G^*$ — регулярный элемент. Тогда семейство $\mathcal{F}_a$ полно на G^*.*

Примеры показывают, что требования простоты алгебры Ли K и неприводимости представления φ в условиях этого следствия нельзя ослабить.

Следствие 2. *Пусть $x \in \mathrm{sl}(n+1, \mathbb{C})$ или $x \in \mathrm{sp}(2n, \mathbb{C})$ — произвольный элемент (не обязательно полупростой).* Тогда $\operatorname{ind} \operatorname{Ann}(x) = n$, *и, следовательно, методом сдвига аргумента можно построить полные инволютивные семейства функций на любой сингулярной орбите в алгебрах Ли* $\mathrm{sl}(n+1, \mathbb{C})$ *и* $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{C})$.

Пока неизвестно, имеет ли место аналогичное утверждение для остальных серий простых алгебр Ли. В общем случае ситуация осложняется из-за существования так называемых полурегулярных нильпотентных элементов.

Опишем теперь общую конструкцию, частным случаем которой является метод сдвига аргумента. В основе конструкции лежит понятие согласованных пуассоновых структур (пуассоновых пар), связь которых с интегрируемостью гамильтоновых систем была, по-видимому, впервые обнаружена Магри в [17]. Напомним, что согласованность пары пуассоновых структур A_0 и A_1, заданных на многообразии M, означает, что их линейная комбинация снова является пуассоновой структурой на M. Рассмотрим в этой ситуации линейное семейство пуассоновых структур $J=\{\lambda A_0+\mu A_1\}$ и выделим в нем подмножество J_0 структур «общего положения», ранг которых в семействе J максимален, т. е. равен $R=\max\limits_{C\in J}\operatorname{rang} C$. Обозначим через $Z(A)$ центральные функции (функции Казимира) пуассоновой структуры A и рассмотрим семейство функций $\mathcal{F}_{J_0}=\bigcup\limits_{A\in J_0} Z(A)$, состоящее из центральных функций пуассоновых структур общего положения.

Предложение 2. *Семейство $\mathcal{F}_{J_0}$ инволютивно относительно любой пуассоновой структуры $C\in J$.*

Мы будем ниже предполагать, что центральные функции всех рассматриваемых пуассоновых структур определены глобально. Скажем, что инволютивное семейство функций $\mathcal{F}$ полно в точке $x\in M$, если подпространство в $T_x^*O_x$, порожденное дифференциалами функций $f\in\mathcal{F}$, ограниченных на симплектический слой O_x, имеет размерность $(1/2)\dim O_x$.

Теорема 7 (А. В. Браилов). *Фиксируем пуассонову структуру $A\in J_0$ и точку «общего положения» $x\in M$, такую, что* $\operatorname{rang} A(x)=R$. *Инволютивное семейство $\mathcal{F}_{J_0}$ полно в точке $x\in M$ в смысле пуассоновой структуры A тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang}\lambda A_0(x)+\mu A_1(x)=R$ *для любых коэффициентов λ, $\mu\in\mathbb{C}$, не обращающихся одновременно в нуль.*

Аналогичный критерий имеется и в случае сингулярного симплектического слоя (Болсинов А. В. [16]).

Рассмотрим некоторые примеры.

1. На двойственном пространстве G^* произвольной конечномерной алгебры Ли рассмотрим постоянную скобку Пуассона $\{\ ,\ \}_a$, $a\in G^*$, которая получается из стандартной скобки Пуас-

сона — Ли «замораживанием» аргумента: $\{f, g\}_a(x) = (a, [df(x), dg(x)])$ (см., например, работу М. В. Мещерякова [18]). Скобки $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$ согласованы, и центральные функции линейной комбинации $\{\ ,\ \} + \lambda\{\ ,\ \}_a$ имеют вид $f(x + \lambda a)$, где f — инвариант коприсоединенного представления. Таким образом, мы получаем, следуя общей конструкции, инволютивное семейство функций $\{f(x + \lambda a) \mid f \in I(G),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ (см. выше метод сдвига аргумента).

2. Пусть $G = H \oplus V$ — симметрически градуированная алгебра Ли, т. е. $[H, H] \subset H$, $[H, V] \subset V$, $[V, V] \subset H$. Обозначим через $\tilde{G}$ полупрямую сумму H и V, считая V коммутативным идеалом. На двойственном пространстве $G^* = \tilde{G}^* = H^* + V^*$ рассмотрим три различные скобки Пуассона: 1) скобку Пуассона — Ли $\{\ ,\ \}$, отвечающую алгебре Ли G, 2) скобку Пуассона — Ли $\widetilde{\{\ ,\ \}}$, отвечающую алгебре Ли $\tilde{G}$, 3) скобку $\{\ ,\ \}_a$, где $a \in V^*$; отметим, что скобку $\{\ ,\ \}_a$ можно определять по любой из первых двух скобок. Все три скобки согласованы. Рассмотрим двумерное семейство, натянутое на скобки $\widetilde{\{\ ,\ \}}$ и $\{\ ,\ \} + \{\ ,\ \}_a$. Применяя общую конструкцию в этом случае, получаем семейство функций $\{f(\lambda h + v + \lambda^2 a) \mid f \in I(G),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, инволютивное на G^* относительно скобки $\widetilde{\{\ ,\ \}}$. Функции такого вида являются первыми интегралами гамильтоновых систем, описывающих случаи Лагранжа и Ковалевской движения твердого тела в поле силы тяжести, многомерное обобщение случая Клебша, движение твердого тела в квадратичном потенциале (см. подробности в работах [19], [20], [21]).

3. Третий пример связан с так называемыми лиевыми пучками, классификация которых при некоторых дополнительных ограничениях была получена И. Л. Кантором и Д. Б. Персицем. Лиевым пучком на линейном пространстве L называется семейство лиевых структур $[\ ,\ ]_A$, параметризованное элементами некоторого линейного пространства I так, что $\alpha[\ ,\ ]_A + \beta[\ ,\ ]_B = [\ ,\ ]_{\alpha A + \beta B}$. На двойственном пространстве L^* автоматически возникает семейство согласованных скобок Пуассона — Ли $(\{\ ,\ \}_A)_{A \in I}$, где $\{f, g\}_A(x) = (x, [df, dg]_A)$. В качестве наиболее интересного примера рассмотрим лиев пучок на пространстве кососимметрических матриц L: $[X, Y]_A = XAY - YAX$, где A — симметрическая матрица, $X, Y \in L$. Отождествим пространства L и L^* с помощью скалярного произведения $(X, Y) = -\operatorname{Tr} XY$. Рассмотрим две симметричные матрицы $E = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ и $B^2 = \operatorname{diag}(b_1^2, \ldots, b_n^2)$ и соответствующее семейство согласованных скобок Пуассона $\{\ ,\ \}_{\lambda E + \mu B^2}$. Оказывается, уравнения движения n-мерного твердого тела (1) гамильтоновы относительно

любой нетривиальной скобки из этого семейства. Центральные функции каждой из скобок $\{\ ,\ \}_{\lambda E+\mu B^2}$ являются, следовательно, первыми интегралами системы (1). Если элементы матрицы B^2 различны, то эти первые интегралы находятся в инволюции и выражаются через функции вида $\operatorname{Tr}(X+\lambda B^2)^k$.

Отметим, что для гамильтоновых систем (2) на полупростых алгебрах Ли G Мещеряковым [18] был доказан более сильный результат. А именно, было показано, что системы $\dot{x}=[\varphi_{a,b,D}(x),\ x]$ и только они являются одновременно гамильтоновыми относительно пары скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$.

Пусть $E_0=\operatorname{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ 0)$. Алгебра Ли L_{E_0}, заданная на пространстве L коммутатором $[\ ,\ ]_{E_0}$, изоморфна алгебре Ли $\mathrm{e}(n-1)=\mathrm{so}(n-1)+\mathbb{R}^{n-1}$ группы движений $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Рассмотрим на L^* гамильтонову систему относительно скобки $\{\ ,\ \}_{E_0}$

$$\begin{aligned}\dot{y}_{ij}&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{c_i-c_k}{d_i-d_k}-\frac{c_k-c_j}{d_k-d_j}\right)y_{ik}y_{kj}-(c_i-c_j)\,y_{in}y_{jn},\\ \dot{y}_{in}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_i-c_k}{d_i-d_k}\,y_{ik}y_{kn}\qquad(1\leqslant i<j<n)\end{aligned}\tag{4}$$

с гамильтонианом $f(Y)=\sum\limits_{i<j<n}\frac{c_i-c_j}{d_i-d_j}\,y_{ij}^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}c_iy_{in}^2$, где $y_{ij}=-y_{ji}$ — элементы кососимметрической матрицы Y. Эти уравнения являются многомерным аналогом случая Клебша движения твердого тела в идеальной жидкости (см. работу А. М. Переломова [22]). Так же, как и уравнения Эйлера движения твердого тела с закрепленной точкой (1), уравнения (4) гамильтоновы относительно линейного семейства скобок Пуассона $\{\ ,\ \}_{\lambda E_0+\mu D}$, где $D=\operatorname{diag}(d_1,\ \ldots,\ d_{n-1},\ 1)$. Заметим, что лиевы пучки $\left([\ ,\ ]_{\lambda E+\mu B^2}\right)_{\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}}$ и $\left([\ ,\ ]_{\lambda E_0+\mu D}\right)_{\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}}$ изоморфны при $B^2=D^{-1}E_0+\mu E$, из чего легко следует существование линейной замены переменных, приводящей систему (1) к виду (4). Это наблюдение еще раз иллюстрирует связь между интегрируемыми случаями Эйлера и Клебша, отмеченную в работах С. П. Новикова [23] и А. И. Бобенко [24].

Изложим теперь вкратце результаты, касающиеся топологии интегрируемых гамильтоновых систем [25—27]. Пусть M^4 — четырехмерное симплектическое многообразие, на котором задана гамильтонова система $v=\operatorname{sgrad}H$, где H — гладкий гамильтониан. Пусть гамильтонова система $v=\operatorname{sgrad}H$ вполне интегрируема по Лиувиллю, т. е. существует дополнительный первый интеграл f, независимый с H. Рассмотрим фиксированную некритическую изоэнергетическую поверхность $Q^3 = \{H = \mathrm{const}\}$, $\operatorname{grad} H \neq 0$. Ограничим функцию f на инвариантную поверхность Q.

Определение. Будем называть интеграл f *боттовским* на поверхности Q, если его критические точки образуют на Q невырожденные критические подмногообразия T (невырожденность означает, что гессиан d^2f невырожден на подпространствах, нормальных к этим многообразиям).

Примеры показывают, что в большинстве случаев f удовлетворяет сформулированным требованиям. Критические подмногообразия T могут быть при этом пяти существенно различных типов: 1) минимаксная окружность S^1 (локальный минимум или максимум для функции f), 2) минимаксный тор T^2, 3) седловая критическая окружность S^1 с ориентируемой сепаратрисной диаграммой, 4) седловая критическая окружность S^1 с неориентируемой сепаратрисной диаграммой, 5) минимаксная бутылка Клейна K^2.

Рассмотрим следующие простейшие трехмерные многообразия, краями которых являются двумерные торы T^2:

1) Полнотория $S^1 \times D^2$.

2) Цилиндры $T^2 \times D^1$.

3) Прямое произведение (назовем его ориентированным седлом) $N^2 \times S^1$, где N^2 — диск с двумя дырками.

4) Рассмотрим нетривиальное расслоение $A^3 \xrightarrow{N^2} S^1$ с базой S^1 и слоем N^2. Край многообразия A^3 — два тора T^2. Ясно, что A^3 (назовем его неориентированных седлом) реализуется в $\mathbb{R}^3$ в виде полнотория, из которого высверлено второе (тонкое) полноторие, два раза обходящее вокруг оси большого полнотория (двойная намотка).

5) $K^3 = K^2 \widetilde{\times} S^1$ — косое произведение бутылки Клейна K^2 на S^1. Краем K^3 является двумерный тор T^2.

Следующая основная теорема описывает строение трехмерной изоэнергетической поверхности Q в случае существования дополнительного боттовского интеграла f.

Теорема 8 (см. [25—26]). *Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова система на симплектическом многообразии M^4, интегрируемая на какой-то одной неособой компактной трехмерной поверхности постоянной энергии $Q^3 \subset M^4$ при помощи боттовского интеграла f. Пусть m — число устойчивых периодических решений системы v на поверхности Q^3 (интеграл f достигает на* *них локального минимума или максимума), p — число двумерных критических минимаксных торов интеграла f, q — число критических седловых окружностей с ориентируемой сепаратрисной диаграммой, s — число критических седловых окружностей с неориентируемой сепаратрисной диаграммой и r — число критических минимаксных бутылок Клейна интеграла f. Тогда Q может быть представлена в виде склейки «элементарных кирпичей» по некоторым диффеоморфизмам их граничных торов:* $Q = m\mathrm{I} + p\mathrm{II} + q\mathrm{III} + s\mathrm{IV} + r\mathrm{V} = m(S^1 \times D^2) + p(T^2 \times D^1) + q(N^2 \times S^1) + sA^3 + rK^3$.

Это разложение поверхности Q на блоки естественно называть *гамильтоновым*, поскольку оно однозначно строится по дополнительному интегралу f гамильтоновой системы v. Если забыть про интеграл f, разложение перестанет быть однозначным.

Предложение 3. *Трехмерные многообразия $T^2 \times D^1$, A^3 и K^3 могут быть склеены из многообразий первого и третьего типов. А именно,* $T^2 \times D^1 = \mathrm{I} + \mathrm{III} = (S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$, $A^3 = \mathrm{I} + \mathrm{III} = (S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$, $K^3 = 2\mathrm{I} + \mathrm{III} = 2(S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$.

В силу этого предложения для изоэнергетической поверхности Q интегрируемой гамильтоновой системы всегда имеет место разложение $Q = m'\mathrm{I} + q'\mathrm{III} = m'(S^1 \times D^2) + q'(N^2 \times S^1)$, которое мы будем называть топологическим.

Пусть (M) — класс всех трехмерных замкнутых компактных ориентируемых многообразий, (Q) — класс, содержащий поверхности постоянной энергии Q^3 интегрируемых (при помощи боттовского интеграла) гамильтоновых систем, (H) — класс трехмерных многообразий, представимых в виде $m'\mathrm{I} + q'\mathrm{III}$. В силу предложения 3 и теоремы 8 $(Q) \subset (H)$. Оказывается, верно и обратное.

Теорема 9 (см. [25]). *Имеет место равенство $(Q) = (H)$, т. е. любое трехмерное многообразие, полученное склейкой полноторий и ориентированных седел, может быть реализовано как изоэнергетическая поверхность интегрируемой (при помощи боттовского интеграла) гамильтоновой системы на некотором симплектическом многообразии M^4.*

С другой стороны имеет место

Предложение 4 (см. [26]). $(Q) \neq (M)$, *т. е. далеко не каждое трехмерное гладкое компактное замкнутое ориентируемое мно-*

гообразие может выступать в роли поверхности постоянной энергии гамильтоновой системы, интегрируемой при помощи боттовского интеграла (на этой поверхности).

В связи с этим уместно привести еще один результат.

Предложение 5 (С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко). *Любое трехмерное многообразие $M^3 \subset (M)$ может быть реализовано в виде изоэнергетической поверхности некоторой (не обязательно интегрируемой) гамильтоновой системы.*

Дадим теперь полную классификацию всех возможных перестроек общего положения торов Лиувилля, возникающих при изменении значения интеграла f. Реализуем тор как одну из компонент края элементарного многообразия типа I, II, III, IV или V (см. выше). Тор, увлекаемый изменением значения интеграла f, преобразуется в объединение торов Лиувилля, являющихся остальными компонентами края того же элементарного многообразия. Эти перестройки, как можно проверить, имеют следующий вид.

1) Тор T^2 стягивается на осевую окружность полнотория и «исчезает» затем с поверхности уровня интеграла f. Обозначим эту перестройку так: $T^2 \to T^1 \to \varnothing$. Перестройка происходит в окрестности минимаксной критической окружности интеграла, т. е. в многообразии $S^1 \times D^2$.

2) Два тора T^2 движутся навстречу друг другу по цилиндру, сливаются в один тор и затем «исчезают». Это происходит в окрестности минимаксного критического тора, т. е. в многообразии $T^2 \times D^1$. Эту перестройку мы обозначим таким образом: $2T^2 \to T^2 \to \varnothing$.

3) Тор T^2 распадается на два тора, проходя через центр ориентированного седла, которые потом «остаются» на поверхности уровня интеграла f. Обозначение: $T^2 \to 2T^2$. Это событие происходит внутри многообразия $N^2 \times S^1$.

4) Тор T^2 два раза «наматывается» на тор T^2, следуя при этом топологии неориентированного седла $A^3 = N^2 \tilde{\times} S^1$, и остается затем на поверхности уровня интеграла f. Обозначение: $T^2 \to T^2$. Эта перестройка происходит внутри многообразия A^3.

5) Тор T^2 превращается в бутылку Клейна, два раза накрывая ее. Затем тор «исчезает» с поверхности уровня интеграла f. Обозначение: $T^2 \to K^2 \to \varnothing$. Это событие происходит в многообразии $K^3 = K^2 \tilde{\times} S^1$.

Пять перестроек, получающихся из перечисленных выше заменой стрелок на обратные, мы не будем считать новыми.

Теорема 10 (см. [25]). *Пусть f боттовский интеграл на неособой поверхности постоянной энергии Q. Тогда любая перестройка общего положения тора Лиувилля, возникающая при его проходе через критическую поверхность уровня интеграла f, является композицией некоторого числа перечисленных выше элементарных (канонических) перестроек* 1, 2, 3, 4, 5. *Более того, из этих пяти перестроек с топологической точки зрения независимы лишь первые три. Перестройки* 4 *и* 5 *распадаются в композиции перестроек вида* 1 *и* 3.

Отметим, что многие конструкции, изложенные выше, существенным образом зависят от дополнительного интеграла f, который нельзя выбрать однозначно. Поэтому возникает задача отыскания топологических инвариантов гамильтоновых систем, т. е. объектов, зависящих только от самого гамильтониана (например, таких как число устойчивых периодических траекторий). Опишем один из таких инвариантов.

Определение. Назовем гамильтониан H *нерезонансным* на даниой изоэнергетической поверхности Q, если в Q всюду плотны торы Лиувилля, на которых интегральные траектории гамильтоновой системы $v = \operatorname{sgrad} H$ образуют плотную иррациональную обмотку.

Опыт изучения конкретных физических систем показывает (см. обзор Козлова [28]), что на четырехмерных многообразиях в большинстве случаев гамильтонианы являются нерезонансными на почти всех поверхностях Q.

Пусть, как и выше, f — дополнительный первый интеграл, боттовский на поверхиости Q, $\alpha \in \mathbb{R}$ и f_α — связная компонента поверхности уровня $f^{-1}(\alpha)$ (особая или неособая). Если $\alpha = a$ — регулярное значение для f, то f_α — тор Лиувилля. Критические значения для f обозначим через c. Через $U(f_c)$ обозначим регулярную связную замкнутую трубчатую окрестность компоненты f_c в многообразии Q^3. В качестве $U(f_c)$ можно взять связную компоненту многообразия $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Тогда край многообразия $U(f_c)$ состоит из объединения торов Лиувилля, и изоэнергетическая поверхность Q^3 получается из всех многообразий $U(f_c)$ склейкой их границ по некоторым диффеоморфизмам граничных торов. В простейшем случае, когда на уровне $f^{-1}(c)$ имеется в точности одно критическое подмногообразие, многообразие $U(f_c)$ является одним из пяти «элементарных кирпичей» (см. выше). В общем случае справедливо

Предложение 6 ([27]). *Каждое многообразие $U(f_c)$ является расслоением Зейферта со слоем S^1 над базой P_c^2, являющейся двумерным многообразием с краем. Особая поверхность f_c, вложенная в $U(f_c)$, является подрасслоением этого расслоения. Следовательно, f_c есть расслоение Зейферта со слоем S^1 над некоторым графом K_c, вложенным в поверхность P_c^2. База P_c^2 и граф K_c однозначно определяются системой v и интегралом f. Каждая вершина графа либо изолирована (отдельная точка), либо имеет кратность 4, т. е. в ней встречаются ровно 4 ребра графа. Граф K_c может состоять из отдельных изолированных точек, непересекающихся окружностей и некоторого числа окружностей, касающихся друг друга только попарно (в каждой точке касания).*

Пусть p_c: $U(f_c) \to P_c^2$ — проекция описанного расслоения и p_c: $f_c \to K_c$. Край поверхности P_c^2 состоит из окружностей. Их прообразы при отображении p_c являются торами в $U(f_c)$. Склейка этих граничных торов, очевидно, индуцирует склейку соответствующих граничных окружностей поверхностей P_c^2 и $P_{c'}^2$. В результате получаем двумерную поверхность $P^2 = \sum P_c^2$. Отметим, что Q не обязано расслаиваться со слоем S^1 (в смысле Зейферта) над P^2. Построим на P^2 граф K, являющийся объединением всех графов K_c и окружностей K_r, по которым склеиваются поверхности вида P_c^2 и $P_{c'}^2$ (при конструировании P^2). Граф разбивает поверхности P^2 на области. Обозначим через $\Gamma(Q, f)$ граф, сопряженный графу K.

Теорема 11 ([27]). *Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова система, интегрируемая на Q при помощи боттовского интеграла. Рассмотрим построенную выше тройку $\Gamma(Q, f)$, $P(Q, f) = P^2$ и $h(Q, f)$, где h: $\Gamma \to P^2$ — вложение. Если гамильтониан H является нерезонансным на Q, то тройка (Γ, P, h) не зависит от выбора второго интеграла. А именно, если f и f' — любые боттовские интегралы системы v, то соответствующие графы $\Gamma(Q, f)$ и $\Gamma(Q, f')$, поверхности $P(Q, f)$ и $P(Q, f')$ гомеоморфны, а следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} h\colon \Gamma & \to & P \\ \wr & & \wr \\ h'\colon \Gamma' & \to & P' \end{array}$$

Следствие. *В нерезонансном случае тройка (Γ, P, h) является топологическим инвариантом самого интегрируемого случая и позволяет классифицировать интегрируемые гамильтонианы по их топологическому типу и сложности.*

Построенный топологический инвариант (Γ, P, h) можно эффективно вычислять. Например, как показал А. А. Ошемков, для классического интегрируемого случая С. В. Ковалевской движения твердого тела полный список графов $\Gamma(Q, f)$ состоит из 6 графов, во всех случаях поверхность $P(Q, f)$ гомеоморфна сфере. В случае Эйлера движения 4-мерного твердого тела полный список $\Gamma(Q, f)$ состоит из 9 графов, среди поверхностей $P(Q, f)$ кроме сфер появляются двумерные торы T^2 [29].

Многие из сформулированных результатов могут быть обобщены на многомерный случай. Здесь мы обсудим типы перестроек общего положения, которым подвергаются торы Лиувилля в n-мерном случае. Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ — гладкая интегрируемая гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} и $F\colon M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ — отображение момента, т. е. $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, где $f_1, \ldots, f_n$ — гладкие коммутирующие интегралы. Точку $x \in M$ будем называть *регулярной*, если ранг $dF(x)$ равен n, и *критической* в противном случае. Пусть $N \subset M$ — множество критических точек и $\Sigma = F(N)$ — бифуркационная диаграмма (множество критических значений). Если $\dim \Sigma < n - 1$, то все слои $B_a = F^{-1}(a) \subset M^{2n}$, где $a \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, состоят из торов Лиувилля и диффеоморфны. Основной случай — когда $\dim \Sigma = n - 1$. Фиксируем значения $n - 1$ интегралов $f_1, \ldots, f_{n-1}$ и рассмотрим соответствующую $(n+1)$-мерную поверхность уровня $X^{n+1} = \{f_1 = c_1, \ldots, f_{n-1} = c_{n-1}\}$ в M. Пусть функции $f_1, \ldots, f_{n-1}$ независимы на X^{n+1}. Ограничим оставшийся интеграл f_n на X^{n+1}, получаем гладкую функцию $f\colon X^{n+1} \to \mathbb{R}$. Пусть c — критическое значение функции f. При переходе через это значение параметра α происходит перестройка регулярных слоев $f^{-1}(\alpha)$, состоящих из торов Лиувилля. Скажем, что эта перестройка является перестройкой общего положения, если функция f является боттовской на X^{n+1} в окрестности множества $f^{-1}(c)$.

Рассмотрим пять типов перестроек торов Лиувилля, являющихся естественными многомерными аналогами перестроек двумерных торов, рассмотренных выше.

1) Тор T^n, реализованный как граница диссипативного полнотория $D^2 \times T^{n-1}$, стягивается на его «ось» — тор T^{n-1} — и исчезает: $T^n \to T^{n-1} \to \varnothing$.

2) Два тора T_1^n и T_2^n — края цилиндра $T^n \times D^1$ — движутся навстречу друг другу, сливаются в один тор T^n и исчезают: $2T^n \to T^n \to \varnothing$.

3) Тор T^n — нижний край ориентированного торического седла $N^2 \times T^{n-1}$ — поднимается вверх и в соответствии с топологией $N^2 \times T^{n-1}$ распадается на два тора: $T^n \to 2T^n$.

4) Рассмотрим неориентированное торическое седло $A_\alpha^{n+1} = N^2 \widetilde{\times} T^{n-1}$, т. е. нетривиальное расслоение $A_\alpha \xrightarrow{N^2} T^{n-1}$. Эти расслоения классифицируются элементами $\alpha \in H_1(T^{n-1}, \mathbb{Z}^2)$. Край A_α^{n+1} состоит из двух торов T^2. Перестройка заключается в преобразовании одного из этих торов в другой путем двукратной намотки в соответствии с топологией A_α^{n+1}: $T_n \xrightarrow{\alpha} T_n$.

5) Пусть p: $T^n \to K^n$ — двулистное накрытие неориентируемого многообразия K^n. Обозначим через K_p^{n+1} цилиндр отображения p. Ясно, что $\partial K_p^{n+1} = T^n$. Перестройка состоит в естественной деформации края T^n на K^n внутри K_p^{n+1}: $T^n \to K^n \to \varnothing$.

Теорема 12 (см. [25, 26]). *Все возможные типы перестроек общего положения исчерпываются композициями пяти канонических перестроек* 1, 2, 3, 4, 5.

Отметим, что теорема 7, дающая необходимые и достаточные условия полноты инволютивного семейства функций $\mathcal{F}_{J_0}$, связанного с согласованными скобками Пуассона, может быть полезна при изучении топологических свойств некоторых интегрируемых гамильтоновых систем, поскольку эта теорема фактически указывает строение критических точек отображения момента. Продемонстрируем это на двух примерах.

Рассмотрим на компактной алгебре Ли G вполне интегрируемую гамильтонову систему $\dot{x} = [\varphi_{a, b, D}(x), x]$ (см. выше). Первыми интегралами этой системы являются функции вида $f(x + \lambda a)$, где f — инвариант присоединенного представления, $a \in G$ — фиксированный регулярный элемент. Мы рассмотрим эквивалентное семейство первых интегралов, взяв частные производные всех порядков базисных инвариантов $f_1, \ldots, f_{\operatorname{ind} G}$ по направлению a. Этих функций будет ровно $N = \sum \deg f_i = (1/2)(\dim G + \operatorname{ind} G)$ штук. Обозначим их через $g_1, \ldots, g_N$, упорядочив произвольным образом, и рассмотрим отображение момента F: $G \to \mathbb{R}^N$, $F(x) = (g_1(x), \ldots, g_N(x))$. Следствием теоремы 7 является

Предложение 7. *Точка $x \in G$ является критической точкой отображения момента тогда и только тогда, когда при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ элемент $x + \lambda a$ сингулярен в $G^{\mathbb{C}}$. Если ранг отображения момента падает в точке $x \in G$ ровно на единицу, то существует единственное число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое, что элемент $x + \lambda a$ сингулярен в G, причем размерность орбиты $O(x + \lambda a)$ падает на два.*

В силу того, что в случае компактной алгебры Ли инварианты выделяют все (в том числе и сингулярные) орбиты, критическая поверхность уровня $F^{-1}F(x)$ состоит из критических точек, если $\operatorname{rang} dF(x)=N-1$. Легко показать, что в этом случае $\dim F^{-1}F(x)=k-1$, где k — размерность лиувиллевского тора общего положения. Таким образом, если ранг dF на всей поверхности уровня $F^{-1}F(x)$ падает на единицу, т. е. не происходит более сильного вырождения, то $F^{-1}F(x)=T^{k-1}$. Тем самым описаны все критнческие поверхности уровня отображения момента F (в случае когда ранг dF падает ровно на 1).

Следствие. *Все неособые слои отображения момента F: $G\to\mathbb{R}^N$ состоят из одинакового числа торов Лиувилля.*

Фиксируем далее значения всех первых интегралов g_i, кроме g_N, и рассмотрим связную компоненту X_0^{k+1} соответствующей поверхности уровня $X^{k+1}=\{g_1=c_1, \ldots, g_{N-1}=c_{N-1}\}$. Будем считать, что X_0^{k+1} компактна и неособа, т. е. дифференциалы функций $g_1, \ldots, g_{N-1}$ на X_0 независимы. Рассмотрим ограничение функции g_N на X_0.

Предложение 8 (А. В. Болсинов). *Ограничение $g=g_N|_{X^0}$ является боттовской функцией на X_0, имеющей ровно два критических значения $c_{\min}$ и $c_{\max}$. Критические поверхности уровня $g^{-1}(c_{\min})$ и $g^{-1}(c_{\max})$ связны и являются торами размерности $k-1$. На поверхности X_0 реализуется только один тип перестроек торов Лиувилля (с точностью до обратной перестройки): $T^k\to T^{k-1}\to\varnothing$. Поверхность X_0 является склейкой двух полноторий $T^{k-1}\times D^2$ по некоторому диффеоморфизму их границ.*

Случай гамильтоновой системы $\dot{h}=[\varphi_{a,b}(h), h]$ на компактной алгебре Ли H более сложен, в частности возникают новые типы перестроек торов Лиувилля. Рассмотрим здесь частный случай таких систем — систему (1), описывающую движение n-мерного твердого тела. Случай $n=4$ был подробно исследован Ошемковым [29], в частности доказана боттовость дополнительного интеграла на почти всех изоэнергетических поверхностях Q, построены графы $\Gamma(Q,f)$ и поверхности $P(Q,f)$. Здесь мы приведем некоторые общие результаты для произвольных n. Как было показано выше, первыми интегралами уравнений движения n-мерного твердого тела (1) являются функции $\operatorname{Tr}(X+\lambda B^2)^k$, $2\leqslant k\leqslant n$. Разложим эти функции по степеням λ и рассмотрим коэффициенты разложения. Учитывая, что коэффициенты при нечетных степенях λ равны нулю, мы получаем в точности $N=(1/2)(\dim \mathrm{so}(n)+\operatorname{ind}\mathrm{so}(n))$ первых интегралов. Обозначим их через $h_1, \ldots, h_N$ и рассмотрим отображение момента F: $\mathrm{so}(n) \to \mathbb{R}^N$, $F(x) = (h_1(x), \ldots, h_N(x))$. Пусть $K \subset \mathrm{so}(n)$ — множество критических точек отображения F, $K_0 \subset K$ — подмножество точек, в которых ранг отображения момента падает ровно на единицу. Воспользуемся связью системы (1) с семейством согласованных скобок Пуассона — Ли $\{\ ,\ \}_{\lambda E + \mu B^2}$ на пространстве кососимметрических матриц $L = \mathrm{so}(n)$.

Предложение 9. *Пусть $x \in K_0$. Тогда точка x является сингулярным ковектором для некоторой алгебры Ли (и притом единственной) L_C, заданной на пространстве L коммутатором $[\ ,\ ]_C$, где $C = \lambda E + \mu B^2$. При этом $\dim \mathrm{Ann}(x) = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, где $\mathrm{Ann}(x) \subset L$ — стационарная подалгебра элемента x в смысле коприсоединенного действия алгебры Ли L_C.*

Предположим, что алгебра Ли L_C полупроста; это эквивалентно условию $\det C \neq 0$. Пусть элемент x полупрост в полупростой алгебре Ли L_C. Ясно, что этот случай является типичным. Тогда $\mathrm{Ann}(x)$ как подалгебра в L_C редуктивна и изоморфна алгебре Ли $T \oplus G^3$, где T — коммутативная алгебра Ли размерности $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$, G^3 — одна из двух вещественных трехмерных простых алгебр Ли $\mathrm{sl}(2)$ или $\mathrm{su}(2)$. Обозначим через $M \subset L$ подпространство, порожденное дифференциалами функций $h_1, \ldots, h_N$. Пользуясь общими свойствами инволютивных семейств функций, связанных с согласованными скобками Пуассона, можно показать, что $\dim M \cap \mathrm{Ann}(x) = \left[\frac{n}{2}\right]$, при этом $\dim M \cap G^3 = 1$. Пусть $y \in M \cap G^3$ — ненулевой элемент. Он определен однозначно с точностью до пропорциональности.

Предложение 10. *Пусть y полупрост в G^3. Тогда в окрестностях точек $x \in K_0$ и $F(x) \in \mathbb{R}^N$ существуют локальные системы координат $x'_1, \ldots, x'_s$ и $h'_1, \ldots, h'_N$ соответственно, в которых отображение момента принимает вид $h'_1 = x'_1, \ldots, h'_{N-1} = x'_{N-1}$, $h'_N = (x'_N)^2 \pm (x'_{N+1})^2$. Если собственные значения элемента $y \in G^3$ вещественны, то $h'_N = (x'_N)^2 - (x'_{N+1})^2$, если чисто мнимые — то $h'_N = (x'_N)^2 + (x'_{N+1})^2$.*

Рассмотрим теперь в K_0 подмножество $\tilde{K}_0$, состоящее из элементов x, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $F(x) \notin F(K \setminus \tilde{K}_0)$,

2) алгебра Ли L_C, для которой x является сингулярным ковектором, полупроста,

3) элемент x полупрост в L_C,

4) элемент $y \in \text{Ann}(x)$ полупрост (см. выше).

Все эти условия являются условиями общего положения, поэтому подмножество $\tilde{K}_0$ открыто и всюду плотно в K.

Теорема 13 (А. В. Болсинов). *Рассмотрим уравнения движения n-мерного твердого тела $\dot{X}=[X, \Omega]$ на алгебре Ли* $\mathrm{so}(n)$ *и соответствующее отображение момента F:* $\mathrm{so}(n) \to \mathbb{R}^N$. *Пусть $x \in \tilde{K}_0$, где $\tilde{K}_0$ — всюду плотное открытое подмножество в множестве критических точек отображения момента F, указанное выше. Тогда перестройка торов Лиувилля при прохождении критического значения $F(x)$ является перестройкой общего положения и может быть представлена в виде композиции следующих трех стандартных перестроек:* 1) $T^k \to T^{k-1} \to \varnothing$, 2) $T^k \to 2T^k$, 3) $T^k \xrightarrow{a} T^k$.

Отметим, что принципиальное отличие топологических свойств системы (1) и системы (2) связано с некомпактностью алгебр Ли, отвечающих некоторым скобкам Пуассона — Ли из линейного семейства $\{\ ,\ \}_{\lambda E + \mu B^2}$.

Литература

[1] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I. — Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985, с. 179—284.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.

[3] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия. — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985, с. 7—139.

[4] Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела. — Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 4, с. 93—94.

[5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 2, с. 396—415.

[6] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли. — Успехи матем. наук, 1984, т. 39, № 2, с. 3—56.

[7] Фоменко А. Т. О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах. — Матем. сборник, 1981, т. 115, № 2, с. 268—280.

[8] Дао Чонг Тхи. Интегрируемость уравнений Эйлера на однородных симплектических многообразиях. — Матем. сборник, 1981, т. 106, № 2, с. 154—161.

[9] Браилов А. В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1986, т. 50, № 4, с. 661—667.

[10] Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах. — В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XXI. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 13—22.

[11] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли. — Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1987, с. 227—299.

[12] Браилов А. В. Инволютивные наборы на алгебрах Ли и расширение кольца скаляров. — Вестник МГУ. Сер. матем. и механ., 1983, № 1, с. 47—51.

[13] Ле Нгок Тьеуен. Полные инволютивные наборы функций на расширениях алгебр Ли, связанных с алгебрами Фробениуса. — В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XXII. М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 69—106.

[14] Трофимов В. В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре. — ДАН СССР, 1982, т. 263, № 4, с. 812—816.

[15] Элашвили А. Г. Фробениусовы алгебры Ли. — Функц. анализ, 1982, т. 16, № 4, с. 94—95.

[16] Болсинов А. В. Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента. — ДАН СССР, 1988, т. 301, №5, с. 1037—1040.

[17] Magri F. A simple model of the integrable. Hamiltonian equation. — J. Math. Phys., 1978, v. 19, № 5, p. 1156—1162.

[18] Мещеряков М. В. О характеристическом свойстве тензора инерции многомерного твердого тела. — Успехи матем. наук, 1983, т. 38, № 5, с. 201—202.

[19] Рейман А. Г. Интегрируемые системы, связанные с градуированными алгебрами Ли. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 3—54.

[20] Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики. — Изв. АН СССР, Сер. матем., 1984, т. 48, № 5, с. 883—938.

[21] Ratiu T. Euler — Poisson equation on Lie algebras and the N-dimensional heavy rigid bodi. — Amer. J. Math., 1982, v. 104, № 2, p. 409—448.

[22] Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости. — Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 2, с. 83—85.

[23] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. — Успехи матем. наук, 1982, т. 37, № 5, с. 3—49.

[24] Бобенко А. И. Об интегрировании уравнений Эйлера на $e(3)$ и $so(4)$. Изоморфизм интегрируемых случаев. — Функц. анализ, 1986, т. 20, № 1, с. 64—66.

[25] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1986, т. 50, № 6, с. 1276—1307.

[26] Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. — ДАН СССР, 1986, т. 287, № 5, с. 1071—1075.

[27] Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. — Функц. анализ, 1988, т. 22, вып. 4, с. 38—51.

[28] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. — Успехи матем. наук, 1983, т. 38, вып. 1, с. 3—67.

[29] Ошемков А. А. Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $so(4)$. — Успехи матем. наук, 1987, т. 42, вып. 6, с. 199—200.