Указания читателю

Основополагающий принцип в организации материала этой книги — дать возможность читателю, главная цель которого — применять методы теории групп Ли к конкретным задачам, изучить основные вычислительные средства так быстро, как только возможно, с минимумом теории. В то же время вычислительные приложения базируются на прочном теоретическом фундаменте, так что читатель, более склонный к математике, может легко углубляться далее в этот предмет [1]. Каждая глава (кроме первой) устроена так, что приложения и примеры появляются так быстро, как только возможно, а теоретические доказательства и разъяснения откладываются на конец главы. Даже если читатель преследует более теоретические цели, я все же настоятельно рекомендовал бы ему изучить вычислительные средства и примеры, прежде чем приступить к более теоретическим вопросам. Давно известно, что гораздо легче абстрагировать общую математическую теорию из одного удачно подобранного примера, чем применить имеющуюся абстрактную теорию к конкретному примеру. И здесь, я думаю, именно такой случай.

Читателю, интересующемуся главным образом приложениями, я бы рекомендовал следующую стратегию чтения этой книги. Главный вопрос состоит в том, какую часть вводной теории многообразий, векторных полей, групп Ли и алгебр Ли (они для удобства собраны вместе в гл. 1 и § 2.1) действительно нужно освоить, прежде чем оказаться в состоянии приступить к приложениям к дифференциальным уравнениям, которые начинаются с § 2.2. Ответ — на самом деле удивительно малую. Многообразия можно, по большей части, представлять себе локально как открытые подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, в которых имеется соответствующая свобода в выборе координат. Группы геометрических симметрий будут просто совокупностями преобразований таких подмножеств, в которых выполняются простые аксиомы группы, позволяющие нам брать последовательные композиции симметрий, обратные и т. д. Ключевое понятие на этом этапе — инфинитезимальная образую-

[1] Математически искушенному читателю я рекомендую обратить внимание на недавно опубликованную книгу Винберг, Онищик [1 **]. — *Прим. ред.*

щая группы симметрий. Это векторное поле (вида, уже известного из векторного исчисления или механики жидкости) на соответствующем многообразии или подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$, поток которого совпадает с однопараметрической группой, им порожденной. Можно представлять себе, что вся группа симметрий порождается таким же способом композициями базисных потоков ее инфинитезимальных образующих. Таким образом, главное, что требуется усвоить из гл. 1, — это основные обозначения для векторных полей и потоков и соответствие между ними. Другой ключевой результат — инфинитезимальный критерий инвариантности системы алгебраических уравнений относительно такой группы преобразования, выраженный в теореме 2.8. С этими двумя инструментами можно прямо погружаться в материал, относящийся к дифференциальным уравнениям, начиная с § 2.2 и возвращаясь к дальнейшим результатам по группам Ли или многообразиям по мере необходимости.

Обобщение критерия инфинитезимальной инвариантности на системы дифференциальных уравнений основано на важной технике продолжения групповых преобразований, необходимой, чтобы включить не только независимые и зависимые переменные, присутствующие в системе, но и производные от зависимых переменных. Легче всего это осуществляется геометрическим путем посредством введения пространств, координаты которых представляют эти производные — пространства струй § 2.3. Ключевая формула для вычисления групп симметрий дифференциальных уравнений — это формула продолжения для инфинитезимальных образующих из теоремы 2.36. Вооружившись этой формулой (или хотя бы ее частными случаями, имеющимися в следующем за теоремой примере) и соответствующим критерием инфинитезимальной инвариантности, легко вычислить группы симметрий почти любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, которая может возникнуть. Несколько примеров, иллюстрирующих требуемые вычислительные средства, представлено в § 2.4; советуем читателю приложить руки еще к каким-нибудь дополнительным примерам — либо из упражнений в конце гл. 2, либо к какой-нибудь системе дифференциальных уравнений по своему выбору.

В этом месте имеется несколько возможностей двигаться дальше. Для тех, кто интересуется обыкновенными дифференциальными уравнениями, в § 2.5 приведено подробное изложение основного метода Ли интегрирования этих уравнений с помощью групп симметрий [1]). См. также § 4.2 и 6.3, где рассмат-

[1]) См. прим. ред. на стр. 12. — *Прим. ред.*

ривается случай обыкновенных дифференциальных уравнений с вариационной структурой некоторого вида либо в лагранжевой, либо в гамильтоновой форме. Те, кого интересует нахождение точных инвариантных относительно группы решений уравнений с частными производными, могут прямо перейти к гл. 3. В § 3.1 излагается основной метод вычисления этих решений с помощью редукции, а в § 3.2 он иллюстрируется несколькими примерами. Третий параграф этой главы относится к задаче классификации таких решений и требует несколько более тонких результатов по алгебрам Ли из § 1.4. Два последних параграфа гл. 3 посвящены теории, лежащей в основе метода редукции. Для приложений знакомства с ними не требуется; впрочем, в § 3.4 проводится обсуждение важной Пи-теоремы из теории размерности.

Читатель, главная цель которого — вывод законов сохранения с помощью теоремы Нётер, может прямо перейти от § 2.4 к гл. 4, посвященной «классической» форме этого результата. В § 4.1 представлен краткий обзор необходимых наиболее важных понятий из вариационного исчисления. Предмет § 4.2 — введение группы симметрий и основной критерий инфинитезимальной инвариантности для вариационного интеграла, а также процедура редукции, пригодная для обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи. В третьем параграфе вводится общее понятие закона сохранения. Изложение здесь более новое; ведущая идея — соответствие между законами сохранения и их характеристиками; впрочем, технически сложное доказательство теоремы 4.26 при первом чтении благополучно может быть опущено. Доказательство теоремы Нётер становится более или менее прямым, если научиться обращаться с законами сохранения в характеристической форме.

Начиная с гл. 5, требуется несколько более высокий математический уровень, хотя к большей части материала по обобщенным симметриям и законам сохранения все еще можно подходить с чисто вычислительной точки зрения, обходясь лишь минимумом техники теории групп Ли. Наибольшие алгебраические трудности следует отнести к § 5.4, где в полном своем великолепии для истинного любителя боя быков развивается вариационный комплекс. Между прочим, § 5.4 и гл. 7 о гамильтоновых структурах для эволюционных уравнений — единственные разделы книги, где в сколько-нибудь значительной степени используется материал § 1.5 о дифференциальных формах. Несмотря на кажущуюся сложность, доказательства в § 5.4 — существенное улучшение по сравнению с вариантами, имеющимися в литературе.

Глава 6 о конечномерных гамильтоновых системах, вообще говоря, независима от большей части предыдущего материала книги. Вплоть до метода редукции для однопараметрических групп симметрий нужно не слишком много материала по теории групп Ли. Однако теория редукции Марсдена — Вейнстейна для многопараметрических групп симметрий требует некоторых более тонких результатов теории алгебр Ли из § 1.4 и 3.3. Усвоение гл. 7 очень сильно зависит от понимания подхода к гамильтоновой механике, основанного на скобке Пуассона и принятого в гл. 6, и отчасти методов формального вариационного исчисления § 5.4. Тем не менее в соответствующих вычислительных приложениях не так уж трудно добиться достаточного умения.

Приведенные в конце каждой главы упражнения значительно различаются по уровню трудности. Некоторые из них представляют собой довольно рутинные вычисления, основанные на материале книги, но существенное число упражнений является значительным расширением основного материала. Более трудные упражнения отмечены звездочкой; одно или два, отмеченные двумя звездочками, лучше рассматривать как миниатюрные исследовательские проекты. Некоторые из представленных в упражнениях результатов являются новыми; в других случаях я старался дать наиболее подходящие ссылки. Ссылки выбирались скорее на основе прямого соответствия формулировке задачи, чем на основе исторического приоритета.

В конце каждой главы имеется небольшое число замечаний, в основном относящихся к историческим подробностям, и библиографические ссылки по поводу обсуждавшихся результатов. Хотя я не могу надеяться соблюсти полную историческую точность, эти замечания представляют итог значительных усилий в исследовании исторических корней этого предмета. Я старался найти источники и дальнейшую историю многих важных событий в этой области. Несомненно, мои замечания отражают во многом личные пристрастия. Но я надеюсь, что они могут составить основу для более серьезного исследования пленительной и временами причудливой истории этого предмета. Безусловно, эта тема заслуживает внимания настоящих историков математики. Хотя я, по большей части, перечислил работы, которые считаю значительными в историческом развитии этого предмета, я, очевидно, был не в состоянии дать исчерпывающий список всех соответствующих ссылок по причине многократного дублирования, достигнутого в течение десятилетий. Я искренне прошу прощения у тех авторов, работы которых играют значительную роль в этом развитии, но были нечаянно пропущены в этих замечаниях.