Введение

Когда начинающие студенты впервые сталкиваются с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, она чаще всего представляется им как приводящее в недоумение многообразие специальных методов, предназначенных для решения некоторых частных, на первый взгляд не связанных между собой типов уравнений (таких, как уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения или уравнения в полных дифференциалах). Действительно, примерно до середины девятнадцатого века, когда Софус Ли сделал глубокое и имеющее далеко идущие последствия открытие, состоящее в том, что все эти специальные методы на самом деле являются частными случаями общей процедуры интегрирования, основанной на инвариантности дифференциального уравнения относительно некоторой непрерывной группы симметрий, это был скорее вид искусства, чем наука. Открытие Ли сразу унифицировало и значительно расширило имеющиеся методы интегрирования. Оно вдохновило Ли посвятить все дальнейшие свои математические исследования развитию и приложениям его обладающей непреходящей ценностью теории непрерывных групп. Эти группы, повсеместно известные теперь как группы Ли, оказали глубокое влияние на все области математики, как теоретической, так и прикладной, а также на физику, инженерные и другие базирующиеся на математике науки. Приложения непрерывных групп Ли симметрий включают такие разнообразные разделы, как алгебраическая топология, дифференциальная геометрия, теория инвариантов, теория бифуркаций, специальные функции, численный анализ, теория управления, классическая механика, квантовая механика, теория относительности, механика сплошной среды и т. д. Важность вклада Ли в современную науку и математику невозможно переоценить.

Тем не менее для того, кто знаком уже с одним из этих современных проявлений теории групп Ли, может оказаться неожиданностью, что исходным вдохновляющим источником была теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Одна возможная причина общего недостаточного знакомства с этим важным аспектом теории групп Ли — тот факт, что (как бывает с многими прикладными областями) группы Ли, возникающие как группы симметрий истинно физических систем дифференциальных уравнений, часто оказываются не слишком элегантными с чисто математической точки зрения, не будучи ни полупростыми, ни разрешимыми, ни группами Ли каких-либо других особых классов, так популярных среди математиков. Кроме того, часто эти группы действуют на соответствующем пространстве нелинейно (выводя нас за пределы теории представлений) и даже могут быть определены лишь локально, так что эти преобразования имеют смысл только для элементов группы, достаточно близких к единице. Поэтому соответствующие групповые действия по своему духу ближе к изначальной формулировке Ли этого предмета в терминах локальных групп Ли, действующих на открытых подмножествах евклидова пространства, а это идет вразрез с современной тенденцией к абстрактности и глобализации, охватившей большую часть современной теории групп Ли. Исторически приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, начатые Ли и Нётер, постепенно уходили во тьму, в то время как глобальная абстрактная переформулировка дифференциальной геометрии и теории групп Ли, за которую боролся Э. Картан, занимала господствующее положение в математике. Они пребывали без движения почти полвека до тех пор, пока Г. Биркгоф не привлек внимание к неиспользуемым приложениям групп Ли к дифференциальным уравнениям механики жидкости. Затем Л. В. Овсянников и его школа приступили к успешному осуществлению систематической программы приложения методов Ли к широкому кругу физически важных задач. Два последних десятилетия свидетельствуют о подлинном взрыве исследовательской активности в этой области как в приложениях к конкретным физическим системам, так и в расширении рамок и углублении самой теории[1]. Тем не менее много вопросов еще остается нерешенными, и полную область приложимости методов групп Ли к дифференциальным уравнениям еще предстоит определить.

Грубо говоря, группа симметрий системы дифференциальных уравнений — это группа, преобразующая решения этой системы в другие ее решения. В классических рамках теории Ли эти группы состоят из геометрических преобразований пространства независимых и зависимых переменных системы и действуют на решения, преобразуя их графики. Типичные примеры — группы сдвигов и вращений, а также группы растяжений,

[1] Солитонная тематика, имеющая многочисленные приложения, играет здесь не последнюю роль. — *Прим. ред.*

но они, несомненно, не исчерпывают весь круг возможностей. Огромное преимущество рассмотрения непрерывных групп симметрий (в противоположность дискретным симметриям, таким, как отражения) состоит в том, что все их можно найти с помощью точных вычислительных методов. Это говорит не о том, что дискретные группы не важны в изучении дифференциальных уравнений (см., например, Hejhal [1] и приведенные там ссылки), а скорее о том, что нужно применять совершенно иные методы, чтобы их находить или использовать. Фундаментальное открытие Ли состояло в том, что сложные нелинейные условия инвариантности системы относительно преобразований из группы можно в случае непрерывных групп заменить эквивалентными, но гораздо более простыми *линейными* условиями, отражающими «инфинитезимальную инвариантность» этой системы относительно образующих этой группы. Почти для каждой важной с точки зрения физики системы дифференциальных уравнений эти условия инфинитезимальной симметрии — так называемые определяющие уравнения полной группы симметрий системы — можно решить явно в замкнутом виде, и, таким образом, наиболее общая группа непрерывных симметрий системы может быть определена явно. Вся процедура состоит из совершенно механических вычислений, и для этой задачи уже разработано несколько компьютерных систем символьно-аналитических вычислений.

Когда найдена полная группа симметрий системы дифференциальных уравнений, становится доступным ряд приложений. Для начала можно действовать в соответствии с определением группы симметрий, чтобы строить новые решения системы по уже известным. Группа симметрий, таким образом, доставляет средство классификации множества решений (два решения полагаются эквивалентными, если одно можно перевести в другое некоторым элементом группы). Можно использовать группы симметрий по-другому — для классификации семейств дифференциальных уравнений, зависящих от произвольных параметров или функций; часто имеются серьезные физические или математические причины предпочитать такие уравнения с наиболее высокой степенью симметрии. Еще один подход — определить, какие типы дифференциальных уравнений допускают данную группу симметрий. Эта задача также решается инфинитезимальными методами с помощью теории дифференциальных инвариантов.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений из инвариантности относительно однопараметрической группы симметрий следует возможность понижения порядка уравнения на единицу, причем решения исходного уравнения восстанавливаются по решению редуцированного посредством единственной квадратуры. В случае одного уравнения первого порядка этот метод доставляет явную формулу для общего решения. Многопараметрические группы симметрий приводят к дальнейшему понижению порядка, однако мы не всегда можем восстановить решения исходного уравнения по решениям редуцированного посредством одних лишь квадратур, за исключением случая, когда сама группа удовлетворяет дополнительному требованию «разрешимости». Если система обыкновенных дифференциальных уравнений получена из некоторого вариационного принципа (либо как уравнения Эйлера — Лагранжа некоторого функционала, либо как гамильтонова система), то мощность метода редукции с помощью группы симметрий в действительности удваивается. Однопараметрическая группа «вариационных» симметрий позволяет понизить порядок на две единицы; случай многопараметрических групп тоньше [1]).

К сожалению, в случае систем уравнений с частными производными полная группа симметрий обычно не оказывает помощи при отыскании общего решения (хотя в частных случаях она может указывать, когда систему можно преобразовать в легче поддающуюся решению, такую, как линейная). Однако можно использовать группы симметрий, чтобы явно найти частные типы решений, которые сами являются инвариантными относительно некоторой подгруппы полной группы симметрий системы. Эти «инвариантные относительно группы» решения находятся решением редуцированной системы дифференциальных уравнений, содержащей меньшее число независимых переменных, чем исходная система (в силу чего ее, как правило, легче решить). Например, решения уравнения с частными производными от двух независимых переменных, инвариантные относительно заданной однопараметрической группы симметрий, все находятся решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя классические автомодельные решения, происходящие из групп симметрий растяжений, бегущие волны, отражающие некоторую инвариантность системы относительно сдвига, а также многие другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение. Для многих нелинейных систем это *единственные* явные точные решения, имеющиеся в наличии, и в силу этого они играют важную роль и в математическом исследовании, и в физических приложениях таких систем.

---

[1]) Нельзя забывать здесь классическую работу Liouville [1**]. — *Прим. ред.*

В 1918 г. Эмми Нётер доказала две замечательные теоремы, связывающие группы симметрий вариационного интеграла со свойствами соответствующих ему уравнений Эйлера — Лагранжа. В первой из этих теорем Нётер показала, каким образом каждая однопараметрическая группа вариационных симметрий приводит к закону сохранения для уравнений Эйлера — Лагранжа. Таким образом, например, сохранение энергии происходит из инвариантности вариационной задачи относительно группы сдвигов по времени, а сохранение импульса и момента количества движения отражает инвариантность этой системы относительно сдвигов и вращений. Глава 4 посвящена так называемой классической форме этой теоремы Нётер, в которой рассматриваются только геометрические типы групп симметрий. Сама Нётер доказала гораздо более общий результат и установила взаимно однозначное соответствие между группами симметрий и законами сохранения. Общий результат делает необходимым введение «обобщенных симметрий». Это группы, инфинитезимальные образующие которых зависят не только от независимых и зависимых переменных системы, но также и от производных от зависимых переменных. Соответствующие групповые преобразования не будут больше геометрически действовать на пространстве независимых и зависимых переменных, поточечно преобразуя график функции. Теперь это нелокальные преобразования, которые находятся путем интегрирования эволюционной системы уравнений с частными производными. Каждая однопараметрическая группа симметрий вариационной задачи, либо геометрических, либо обобщенных, будет приводить к закону сохранения и, обратно, каждый закон сохранения получается таким способом. Простейший пример сохраняемой величины, происходящей из истинно обобщенной симметрии,— это вектор Рунге — Ленца для задачи Кеплера. Новые дополнительные приложения, включая солитонные уравнения и теорию упругости, пробудили обновленный интерес к общему варианту теоремы Нётер. В § 5.3 мы доказываем усиленную форму теоремы Нётер, утверждающую, что для «нормальных» систем на самом деле имеется взаимно однозначное соответствие между группами *нетривиальных* вариационных симметрий и *нетривиальными* законами сохранения[1]. Условию нормальности удовлетворяет большинство физически важных систем дифференциальных уравнений; анормальные системы — это в сущности системы с нетривиальными условиями интегрируемости. Важный класс анормальных систем, возникающих в общей теории относительности, — это класс систем, вариационные интегралы

[1]) См. также теорему 15 в приложении I. — *Прим. ред.*

которых допускают бесконечномерную группу симметрий, зависящую от произвольной функции. Вторая теорема Нётер показывает, что тогда имеется нетривиальное соотношение между соответствующими уравнениями Эйлера—Лагранжа и, следовательно, имеются нетривиальные симметрии, приводящие только к тривиальным законам сохранения. Найденные законы сохранения имеют много важных приложений, как физических, так и математических, включая теоремы существования, ударные волны, теорию рассеяния, устойчивость, теорию относительности, механику жидкости, теорию упругости и т. д. См. замечания в конце гл. 4, где приведен более широкий список, а также имеются ссылки на литературу.

Недавно было обнаружено, что забытые в течение многих лет, последовавших за провидческой работой Нётер, обобщенные симметрии важны в изучении нелинейных уравнений с частными производными, которые, как, например, уравнение Кортевега — де Фриза, можно рассматривать как вполне интегрируемые системы. Существование бесконечного множества обобщенных симметрий (их можно находить, используя операторы рекурсии из § 5.2) оказывается тесно связанным с возможностью линеаризации системы, либо непосредственно с помощью некоторой замены переменных, либо развитым в последние десятилетия методом обратной задачи рассеяния. Таким образом, основанный на обобщенных симметриях подход, поддающийся прямому вычислению, как и в случае обычных симметрий, доставляет систематические средства распознавания этих замечательных уравнений и, следовательно, построения бесконечного набора законов сохранения для них[1]. (Построение соответствующей задачи рассеяния требует других методов, таких, как методы продолжения из книги Wahlquist, Estabrook [1].)

Некоторые приложения методов групп симметрий к уравнениям с частными производными наиболее естественным образом осуществляются с помощью гамильтоновой структуры некоторого вида. Конечномерная формулировка гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известна. Однако, имея в виду более современную теорию гамильтоновых систем эволюционных уравнений, нам следует принять новый подход ко всему предмету гамильтоновой механики. Мы не будем здесь придавать особое значение использованию канонических координат (координаты p и q в классической механике), а вместо этого сосредоточимся на понятии скобки Пуассона как на краеугольном камне этого предмета. В результате возникает более общее понятие пуассоновой структуры.

---

[1]) См. также: Михайлов, Шабат, Ямилов [1 **]. — *Прим. ред.*

Оно уже поддается распространению на бесконечномерную теорию гамильтоновых систем эволюционных уравнений. Важный частный случай пуассоновой структуры — структура Ли — Пуассона на алгебре, двойственной к алгебре Ли, изначально открытая Ли и с большим эффектом использованная позднее в геометрическом квантовании, теории представлений, механике жидкости и плазмы. При этом общем подходе к гамильтоновой механике законы сохранения могут возникать не только из свойств симметрии системы, но также из вырожденности самой скобки Пуассона. В конечномерной ситуации каждая однопараметрическая гамильтонова группа симметрий позволяет нам понизить порядок системы на две единицы. В современной формулировке возможная степень редукции для многопараметрических групп симметрий дается общей теорией Марсдена и Вейнстейна, основанной на понятии отображения момента в алгебру, двойственную к алгебре Ли симметрий. В более современных работах проявляется большой интерес к системам дифференциальных уравнений, обладающим не только одной, а двумя различными (но согласованными) гамильтоновыми структурами. Для таких «бигамильтоновых систем» имеются прямые рекурсивные средства построения бесконечной иерархии взаимно коммутирующих потоков (симметрий) и соответствующих законов сохранения, указывающей на полную интегрируемость такой системы. Большинство солитонных уравнений, а также некоторые бесконечномерные вполне интегрируемые гамильтоновы системы являются на самом деле бигамильтоновыми.

Предмет, лежащий в основе большей части теории обобщенных симметрий, законов сохранения и гамильтоновых структур для эволюционных уравнений, известен как «формальное вариационное исчисление» и представляет собой исчисление, специально изобретенное для ответа на широкий круг вопросов, относящихся к сложным алгебраическим тождествам между такими объектами, как оператор Эйлера из вариационного исчисления, обобщенные симметрии, полные производные и более общие дифференциальные операторы и различные обобщения понятия дифференциальной формы. Основной результат формального вариационного исчисления — локальная точность некоторого комплекса, называемого вариационным комплексом и являющегося в некотором смысле подходящим обобщением (в вариационном контексте или в контексте пространства струй) комплекса де Рама из алгебраической топологии. В последние годы этот вариационный комплекс, как стало видно, играет все более важную роль в развитии алгебраической и геометрической теории вариационного исчисления. В приложения вариационного комплекса включаются:

(1) решение «обратной задачи вариационного исчисления», состоящей в характеризации тех систем дифференциальных уравнений, которые являются уравнениями Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи;

(2) характеризация «нулевых лагранжианов», т. е. тех вариационных интегралов, выражения Эйлера — Лагранжа которых тождественно обращаются в нуль как полные дивергенции;

(3) характеризация тривиальных законов сохранения, которые также называют нулевыми дивергенциями.

Каждый из этих результатов жизненно важен для развития наших приложений теории групп Ли к изучению законов сохранения и гамильтоновых структур для эволюционных уравнений и может рассматриваться как частный случай точности всего вариационного комплекса. § 5.4 посвящен полному изложению общего доказательства точности и приложению его к этим трем интересующим нас частным случаям.

Хотя эта книга охватывает широкий круг различных приложений теории групп Ли к дифференциальным уравнениям, несколько важных тем мы все же вынуждены были опустить. Наиболее значительный среди этих пробелов — связь между группами Ли и разделением переменных. Имеются две причины опустить этот вопрос. Во-первых, существует прекрасное исчерпывающее изложение Miller [3], уже доступное; во-вторых, кроме специальных классов уравнений с частными производными (таких, как уравнения Гамильтона — Якоби и уравнения Гельмгольца) точные связи между симметриями и разделением переменных к настоящему моменту не поняты как следует. Это особенно справедливо для случая систем линейных уравнений и для случая вполне нелинейного разделения переменных; ни в одном из этих случаев нет даже хорошего определения того, что же влечет за собой на самом деле разделение переменных, не говоря уже о том, как использовать свойства симметрии системы, чтобы указать те системы координат, в которых возможно разделение переменных. Я не пытался также охватить ни одну из обширных областей теории представлений и соответствующих приложений к теории специальных функций; см. Miller [1] или Виленкин [1]. Теория бифуркаций — другая плодородная почва для теоретико-групповых приложений; я отсылаю читателя к записям лекций Sattinger [1] и приведенной там библиографии. Приложения групп симметрий к численному анализу широко представлены в работе Шокина [1]. Распространение настоящих методов на задачу с заданными граничными условиями для уравнений с частными производными можно найти в книгах Bluman, Cole [1] и Seshadri, Na [1], а для задач со свободной границей — в работе Benjamin, Olver [1]. Хотя я широко представил обобщенные симметрии в гл. 5, связанное с ними понятие контактных преобразований, введенное Ли, осталось неохваченным, поскольку оно редко применяется для уравнений, возникающих в приложениях, и по большей части может быть включено в представленную здесь общую теорию; см. Anderson, Ibragimov [1] и имеющиеся там ссылки[1]. Наконец, нам следовало бы упомянуть об использовании методов теории групп Ли в изучении дифференциальных уравнений, возникающих в геометрии, включая, например, движения на римановых многообразиях (ср. Ибрагимов [1]) или симметрические пространства и соответствующие им инвариантные дифференциальные операторы (см. Helgason [1], [2]).

---

[1]) См. также: Михайлов, Шабат, Ямилов [1 **], [2 **]. — *Прим. ред.*