$$f(r) = 4U_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right], \tag{4.19}$$

где U_0 — глубина потенциальной ямы, r_0 — расстояние, на котором $f(r)$ обращается в нуль. Пренебрегая в (4.18) взаимодействием молекул, получим уравнение состояния идеального газа.

Лекция 5. Движение свободной частицы во внешнем поле

Здесь мы рассмотрим важный частный случай, когда частица взаимодействует с системой, движение которой можно считать заданным. Тогда говорят о движении частицы во внешнем поле. В этом случае уравнение (3.12) принимает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}},\ t)\,. \tag{5.1}$$

Начальные условия: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$.

Для произвольных функций $\mathbf{F}(\mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}},\ t)$ система трех уравнений (5.1) неразрешима в аналитическом виде. Поэтому ограничимся рассмотрением частных случаев.

Искусство интегрирования состоит в нахождении первых интегралов. *Первым интегралом* называется функция $f(\mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}},\ t)$, остающаяся постоянной на траекториях системы: $f(\mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}},\ t) = \mathrm{const}$.

5.1. Одномерное движение в консервативном поле. Пусть $\mathbf{F} = -\partial U/\partial\mathbf{r}$; $U(\mathbf{r}) = V(x)$. Из (5.1) находим

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x},\ m\ddot{y} = 0,\ m\ddot{z} = 0. \tag{5.2}$$

Первые интегралы $\dot{y} = \dot{y}_0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$ позволяют получить решение: $y = \dot{y}_0 t + y_0$, $z = \dot{z}_0 t + z_0$. Умножая первое уравнение системы (5.2) на $\dot{x}$, получим

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\right] = 0\,.$$

Следовательно, существует еще один интеграл:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E, \quad E = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + V(x_0), \tag{5.3}$$

который представляет собой уже уравнение первого порядка. Получим его решение методом разделения переменных. Пусть $\dot{x}_0 > 0$. Тогда

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}\,, \tag{5.4}$$

откуда

$$\int\limits_{x_0}^{x}\left[\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x)}\right]^{-1} dx = t. \tag{5.5}$$

Поскольку $\dot{x}^2 > 0$, то область движения по x-координате определяется условием $E \geqslant V(x)$. Точки, в которых $E = V(x)$, называются *точками поворота*, т.к. в них скорость обращается в нуль.

Рассмотрим в качестве примера потенциальное поле Эккарта [13]:

$$V(x) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) + \frac{1}{2}(V_2 - V_1)\operatorname{th} kx - \frac{V_0}{\operatorname{ch}^2 kx},$$

где $V_2 > V_1 > 0$, $V_0 > 0$ (рис. 5.1). Если $E = -E_0 < 0$, то уравнению $E = V(x)$ удовлетворяют две точки — a_1 и a_2 — определяющие

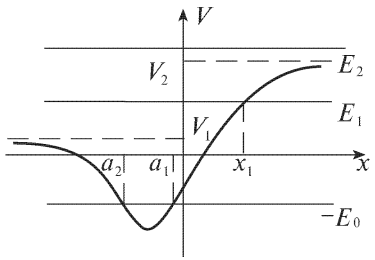

Рис. 5.1

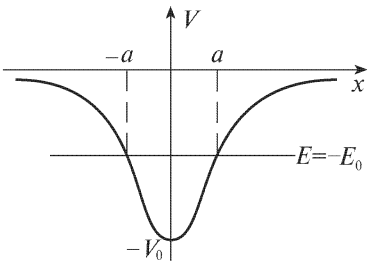

Рис. 5.2

границы движения: $a_2 \leqslant x \leqslant a_1$. Движение является, как говорят, *финитным*, поскольку происходит в ограниченной области пространства. Если $E = E_1$, то разрешенная область движения $-\infty < x \leqslant x_1$ является инфинитной. При $E = E_2 > V_2$ частица движется во всем пространстве.

Рассмотрим случай симметричной ямы (рис. 5.2). Положим $V_1 = V_2 = 0$,

$$V(x) = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2 kx}. \tag{5.6}$$

1. Пусть $E = -E_0 < 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Вычислим интеграл (5.5):

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_0^x \frac{\operatorname{ch} kx\, dx}{\sqrt{-E_0 \operatorname{ch}^2 x + V_0}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_0^x \frac{d \operatorname{sh} kx}{\sqrt{V_0 - E_0 - E_0 \operatorname{sh}^2 x}}.$$

Переходя к переменной $\xi = \sqrt{\dfrac{E_0}{V_0 - E_0}} \operatorname{sh} kx$, получим

$$\operatorname{sh} kx = \sqrt{\frac{V_0 - E_0}{E_0}} \sin \omega t, \quad \omega = k\sqrt{\frac{2E_0}{m}}.$$

Частица движется в потенциальной яме в области $|x| \leqslant a$, $\operatorname{ch}^2 ka = V_0/E_0$. Финитное движение является нелинейными периодическими колебаниями с периодом $T = 2\pi/\omega$. Из (5.5) следует, что период можно найти независимо:

$$T = 2\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \left[\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x)}\right]^{-1} dx, \quad E = V(x_n). \tag{5.7}$$

Зависимость периода от полной энергии приводит к неизохронности колебаний.

Рассмотрим движение у дна ямы, полагая $E = -V_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll V_0$. В этом случае $kx \ll 1$, $V(x) \simeq -V_0(1 - k^2x^2 + \ldots)$. Из (5.5) найдем $x(t)$. Однако, поскольку $V(x)$ — полином не выше второй степени, удобнее вернуться к уравнению (5.3):

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V_0 + V_0k^2x^2 + \ldots = E.$$

Дифференцируя, находим уравнение $m\ddot{x} + 2V_0k^2x = 0$. Следовательно,

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \quad \omega_0 = k\sqrt{\frac{2V_0}{m}}.$$

2. Пусть $x(0) = -L$, $\dot{x}(0) = v_0$, $E \approx mv_0^2/2$. Найдем промежуток времени T, за который частица достигнет точки $x = L$, удовлетворяющей условию $kL \gg 1$. Переходя к переменной $\xi = [E/(E + V_0)]^{1/2}\,\mathrm{sh}\,kx$ и вводя обозначения $\theta = [E/(E + V_0)]^{1/2}\,\mathrm{sh}\,kL$, $\tau = k^{-1}(m/2E)^{1/2} = 1/kv_0$, получим

$$T = \tau\int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \tau\,\ln\frac{(1+\theta^2)^{1/2}+\theta}{(1+\theta^2)^{1/2}-\theta} \approx \tau\,\ln(4\theta^2) = \frac{2L}{v_0} + \Delta t,$$
$$\text{где} \quad \Delta t = \tau\,\ln\frac{E}{E+V_0} < 0. \tag{5.8}$$

Первое слагаемое определяет время движения частицы в отсутствие поля. Второе слагаемое обусловлено взаимодействием частицы и поля. Поэтому конечное время «запаздывания» Δt удобно представить как разность двух расходящихся интегралов:

$$\Delta t = 2\frac{\partial G}{\partial E}, \quad G = \lim_{L\mapsto\infty}\int\limits_{-L}^{L} dx\{[2m(E-V)]^{1/2} - (2mE)^{1/2}\}.$$

5.2. Движение заряда в электромагнитном поле. В этом случае уравнение (5.1) принимает согласно (3.1) вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) + \frac{e}{c}\left[\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},\ t)\right]. \tag{5.9}$$

Умножая обе части на $\dot{\mathbf{r}}$, получим закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} = e\mathbf{E}\dot{\mathbf{r}}. \tag{5.10}$$

Правая часть (5.10) — мощность силы, с которой действует на заряд электрическое поле. Работа силы Лоренца над зарядом равна нулю. Если

электрическое поле не зависит от времени, то $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, где $\varphi(\mathbf{r})$ — потенциал электрического поля. Из (5.10) находим интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\varphi(\mathbf{r}) = E, \tag{5.11}$$

где $e\varphi(\mathbf{r}) = U^{\text{ext}}(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия взаимодейсвия заряда с внешним полем.

Пример 5.1. Протон движется в неоднородном постоянном магнитном поле $B = (0,\ 0,\ B_0\text{ch}^{-2}\ ky)$, образующем магнитную стенку, параллельную оси x. Начальные условия: $\mathbf{r}(0) = (0,\ -\infty,\ 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0,\ v_0,\ 0)$. Найти условия прохождения протона сквозь магнитную стенку.

Уравнения движения:

$$\ddot{x} = \omega\frac{\dot{y}}{\text{ch}^2\ ky}, \quad \ddot{y} = -\omega\frac{\dot{x}}{\text{ch}^2\ ky}, \quad \ddot{z} = 0; \quad \omega = \frac{eB_0}{mc}.$$

Из третьего уравнения следует, что $z(t) = 0$, а из первого находим интеграл

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x} - \frac{\omega}{k}\text{th}\ ky\right) = 0 \to \dot{x} = \frac{\omega}{k}(1 + \text{th}\ ky).$$

Подставляя $\dot{x},\ \dot{z}$ в интеграл энергии $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2$, получим уравнение

$$\dot{y}^2 = v_0^2 - f(y),\ f(y) = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2(1 + \text{th}\ ky)^2.$$

Поскольку $0 \leqslant f(y) \leqslant (2\omega/k)^2$, то при $v_0 < 2\omega/k$ существует точка остановки — протон отразится от стенки. При $v_0 > 2\omega/k$ протон пройдет сквозь магнитную стенку.

Пример 5.2. Электрон движется в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = (0,\ B,\ 0)$ и электрическом поле квадрупольного конденсатора, потенциал которого $\varphi = \dfrac{U_0}{2a^2}(x^2 - y^2)$. Найти решение уравнений движения; $\mathbf{r}(0) = (0,\ y_0,\ 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0,\ 0,\ v_0)$.

Из уравнения $m\ddot{\mathbf{r}} = e_0\nabla\varphi - \dfrac{e_0}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}]$ получим систему:

$$\ddot{x} = \Omega_2^2 x + \omega\dot{z}, \quad \ddot{y} = -\Omega_2^2 y, \quad \ddot{z} = -\omega\dot{x},$$

где $\omega = e_0B/mc,\ \Omega_2^2 = e_0U_0/ma^2$. Из второго уравнения находим $y(t) = y_0\cos\Omega_2 t$. Из третьего уравнения находим интеграл

$$\dot{z} + \omega x = v_0. \tag{1}$$

Теперь первое уравнения приобретает вид

$$\ddot{x} + (\omega^2 - \Omega_2^2)x = \omega v_0. \tag{2}$$

Пусть $\omega^2 - \Omega_2^2 = \Omega_1^2 > 0$. Тогда решение (2)

$$x = \frac{\omega}{\Omega_1^2}v_0(1 - \cos\Omega_1 t). \tag{3}$$

Подставляя (*3*) в (*1*), получим уравнение

$$\dot{z} = -\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2 v_0 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2 v_0 \cos\Omega_1 t\,.$$

Интегрируя, находим

$$z = -\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2 v_0 t + \frac{\omega^2}{\Omega_1^3}\, v_0 \sin\Omega_1 t\,.$$

5.3. Движение частицы в центрально-симметричном поле. Потенциальная энергия взаимодействия $\Pi(\mathbf{r}) = U(r)$. В этом случае сила, действующая на частицу, равна

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r}\,.$$

Найдем первые интегралы. Умножая уравнение движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

на $\dot{\mathbf{r}}$, получим интеграл энергии

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) = E\,.$$

Далее, вычисляя производную момента импульса

$$\dot{\mathbf{M}} = m[\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}] = -\left[\mathbf{r}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\right]\frac{\partial U}{\partial r} = 0,$$

находим еще три интеграла $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$. Умножая обе части этого соотношения на $\mathbf{r}$, получим уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{M}_0$ и проходящей через начало координат:

$$\mathbf{M_0 r} = 0.$$

Четыре интеграла позволяют полностью проинтегрировать уравнения движения. В общем случае переменные разделяются только в сферической системе координат.

Пусть $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$. Если ось z декартовой системы координат выбрать параллельно вектору $\mathbf{M}_0$, то $z(t) = 0$. Сферическая координата $\theta(t) = \pi/2$. Первые интегралы можно записать в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E\,, \tag{5.12}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = M_0\,. \tag{5.13}$$

Исключая $\dot{\varphi}$ из (5.12), получим уравнение

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M_0^2}{2mr^2} + U(r) = E\,, \tag{5.14}$$

описывающее движение по координате $r \geqslant 0$ в поле с эффективной потенциальной энергией

$$U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{M_0^2}{2mr^2}\,.$$

Второе слагаемое в последнем выражении называют *центробежной энергией*. Область допустимых значений r определяется неравенством $E \geqslant U_{\text{эф}}$. Условие $E = U_{\text{эф}}(r)$, соответствующее $\dot{r} = 0$, определяет точки поворота траектории, в которых функция $\dot{r}(t)$ изменяет сигнатуру. Если $\dot{r}(0) > 0$, то, разрешая (5.14) относительно $\dot{r}$, получим

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\,[E - U_{\text{эф}}(r)]}. \tag{5.15}$$

Разделяя переменные r и t, найдем решение в квадратуре:

$$\int \left[\frac{2}{m}\big(E - U_{\text{эф}}(r)\big)\right]^{-1/2} dr = t + C_0\,. \tag{5.16}$$

Далее, записывая $\dot{\varphi}$ в виде $\dot{\varphi} = (d\varphi/dr)\dot{r}$, найдем из (5.13), (5.15) уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{M_0}{mr^2}\left[\frac{2}{m}\big(E - U_{\text{эф}}(r)\big)\right]^{-1/2} dr + C\,. \tag{5.17}$$

Соотношения (5.16), (5.17) представляют собой закон движения частицы в параметрической форме.

Лекция 6. **Задача Кеплера**

6.1. Потенциальная энергия взаимодействия однородного шара и частицы. Энергия взаимодействия имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = -Gm\int \frac{dM}{|\mathbf{r} - \xi|},$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы элементарной массы шара dM и частицы (рис. 6.1); M, R — масса и радиус шара. В сферической системе координат с полярной осью, направленной по вектору $\mathbf{r}$, имеем

$$U(\mathbf{r}) = -Gm\rho\int\limits_0^R d\xi\,\xi^2\int\limits_0^\pi d\theta\sin\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi[r^2 + \xi^2 - 2r\xi\,\cos\theta]^{-1/2} =$$

$$= -Gm\rho\frac{2\pi}{r}\int\limits_0^R d\xi\,\xi\,[r + \xi - |r - \xi|], \quad \rho = \frac{M}{V}, \quad V = \frac{4\pi}{3}R^3\,.$$

Если $r > R$, то $\xi < r$, $|r - \xi| = r - \xi$,

$$U(\mathbf{r}) = -Gm\rho\frac{2\pi}{r}\int\limits_0^R d\xi 2\xi^2 = -Gm\rho\frac{4\pi R^3}{3r} = -\frac{GmM}{r}\,. \tag{6.1}$$

В случае $r < R$

$$U(\mathbf{r}) = -Gm\rho\frac{2\pi}{r}\left[\int\limits_0^r d\xi\,2\,\xi^2 + \int\limits_r^R d\xi\,2\,\xi r\right] = -\frac{GmM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{6.2}$$