Диагональные компоненты ε_{ii} описывают удлинения или сжатия, остальные компоненты ε_{ij} являются компонентами деформации сдвига. Угол сдвига, или полный сдвиг в какой-то плоскости, равен соответствующему недиагональному компоненту тензора деформации ε_{ij}.

4.2. УПРУГОСТЬ. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Механические свойства твердых тел наиболее полно описываются диаграммами деформации. Диаграммы деформации представляют собой зависимости между механическими напряжениями σ, которые возникают в твердом теле при приложении к нему внешней силы, и деформациями ε. Из диаграмм деформации получают систему характеристик прочности (пределы прочности, текучести, упругости, относительные удлинения, сужения и др.). Заметим, что диаграммы деформации не зависят от геометрических размеров образца, поскольку σ и ε являются удельными величинами.

На рис. 4.9 приведена типичная диаграмма деформации для одноосного растяжения цилиндрического образца. Естественно, что изучение механических, в том числе и упругих, свойств твердых тел легче всего начать с анализа диаграммы деформации. Как видно из рис. 4.9, кривая $\sigma=f(\varepsilon)$ обнаруживает несколько характерных особенностей. Так, при малых напряжениях наблюдается линейная зависимость деформации от напряжения (участок OA). Другой особенностью участка OA является то, что после снятия нагрузки форма и размеры образца восстанавливаются, т. е. деформация оказывается обратимой. Обратимость деформации на участке OA наблюдается только в том случае, если нагрузка прилагается и снимается сравнительно быстро. Если нагрузка приложена в течение большого промежутка времени, то мы сталкиваемся с явлением «крипа» (ползучести), а следовательно, и с необратимостью деформации. Прямолинейный участок OA называют областью упругой деформации (для твердых тел $\varepsilon \ll 1\ \%$).

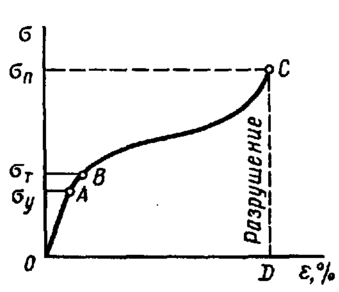

Рис. 4.9. Диаграмма деформации

За пределами упругой области при переходе через точку A (напряжение, соответствующее этой точке, называют *пределом упругости* σ_y) кривая переходит в так называемую пластическую область. Величина $\sigma_т$ соответствует пределу текучести — минимальному напряжению, при котором деформация продолжает возрастать без увеличения нагрузки. Точка C кривой $\sigma=f(\varepsilon)$ соответствует *пределу прочности* $\sigma_п$. При достижении предела прочности образец разрушается. Под прочностью понимают отношение минимальной нагрузки, при которой образец разрушается, к площади сечения образца.

Основные закономерности поведения твердых тел в упругой области экспериментально впервые были изучены Р. Гуком (1678). Им установлено, что при нагружении *изотропного тела* (для изотропного тела любые произвольно выбранные направления эквивалентны), когда деформации и напряжения достаточно малы, деформация пропорциональна приложенному напряжению (закон Гука):

$$\varepsilon=S\sigma. \tag{4.16}$$

Здесь $\varepsilon=\Delta l/l$ — продольная деформация при растяжении; l — первоначальная длина испытуемого образца; Δl — приращение длины в результате деформации; S — константа *упругой податливости, или просто податливость.*

Закон Гука можно записать и в такой форме:

$$\sigma=C\varepsilon, \tag{4.17}$$

где $C=1/S$ — *константа упругой жесткости, или просто жесткость*. Видно, что, чем меньше податливость, тем более жестким является кристалл. В литературе, особенно технической C часто называют модулем Юнга и обозначают E, тогда

$$\sigma=E\varepsilon. \tag{4.18}$$

Закон Гука для сдвиговой деформации при действии касательных (скалывающих) напряжений τ имеет такой же простой вид, как и для случая растяжения:

$$\tau=F/S=G\,\Delta l/h=G\operatorname{tg}\alpha, \tag{4.19}$$

где G — модуль сдвига (или модуль упругости при сдвиге); $\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла сдвига (см. рис. 4.5); S — площадь сечения образца в плоскости сдвига; F — сила сдвига.

В случае всестороннего сжатия (или растяжения), например, при гидростатическом сжатии, закон Гука имеет вид

$$P=\varkappa\frac{\Delta V}{V}=\varkappa\Omega, \tag{4.20}$$

где P — гидростатическое давление; $\varkappa$ — коэффициент всестороннего сжатия или модуль объемной деформации; Ω — объемная деформация.

Закон Гука, записанный в виде формул (4.16)—(4.19), определяет зависимость между напряжением и деформацией в одном и том же направлении, т. е. в направлении приложения внешней силы. Такая запись носит название элементарного закона Гука. Однако деформация может возникать и в направлениях, отличных от направления приложения силы. В этих случаях закон Гука в элементарной форме уже недостаточен и необходимо воспользоваться обобщенным законом Гука. В самом деле, при одноосном растяжении цилиндрического образца происходит не только его удлиение в направлении приложенной силы, но и сжатие образца в поперечных направлениях, т. е. имеет место трехосная деформация. Поперечная деформация при упругом растяжении или сжатии характеризуется *коэффициентом Пуассона* ν, равным отношению изменения размеров в поперечном направлении к их изменению в продольном направлении. Для большинства твердых тел значения ν лежат между 0,25 и 0,35. Из рис. 4.10 следует, что

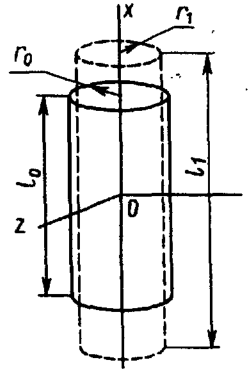

Рис. 4.10. Изменение размеров при одноосном растяжении цилиндрического образца

$$\nu = \frac{(r_1 - r_0)/r_0}{(l_1 - l_0)/l_0} = -\frac{d\,r/r_0}{d\,l/l_0}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z - \nu\,\varepsilon_x.$$

Обобщенный закон Гука устанавливает линейную зависимость не только между одним напряжением и соответствующей деформацией, но между компонентами тензора напряжений ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$) *и каждым компонентом тензора деформации* ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$).

Обобщенный закон Гука для изотропного тела записывают в следующем виде:

для удлинений:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right];$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right];$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]; \qquad (4.21)$$

для сдвигов

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{23}}{G} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \qquad (4.22)$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{zx} = \frac{\sigma_{31}}{G} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Можно показать, что константы упругости E, G и ν связаны между собой выражением

$$G=E/[2(1+\nu)]. \tag{4.23}$$

Таким образом, зная две константы, можно всегда определить третью.

4.3. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Монокристаллические твердые тела являются телами анизотропными. В общем случае для монокристаллов любые произвольно выбранные направления по свойствам неэквивалентны.

Выше мы видели, что однородное напряжение и однородная бесконечно малая деформация описываются тензорами второго ранга, каждый из которых определяется девятью компонентами деформации ε_{ij} и девятью компонентами напряжения σ_{ij}. *Если деформация бесконечно мала и однородна, то каждая компонента тензора деформации линейно связана со всеми компонентами тензора напряжений и, наоборот, каждая компонента тензора напряжения линейно связана со всеми компонентами тензора деформаций.* В этом заключается сущность закона Гука для анизотропных твердых тел. Математический закон Гука для монокристаллов запишется

$$\varepsilon_{ij}=S_{ijkl}\,\sigma_{kl}, \tag{4.24}$$

либо как

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}, \tag{4.25}$$

где S_{ijkl} и C_{ijkl} — константы податливости и жесткости кристалла соответственно. Легко сообразить, что всего будет 81 компонента S_{ijkl} и 81 компонента C_{ijkl}.

Из теории упругости известно, что, если два тензора второго ранга связаны соотношением вида (4.24), (4.25), то величины $C_{ijkl}(S_{ijkl})$ образуют тензор четвертого ранга. Тензор, составленный из коэффициентов C_{ijkl}, называют *тензором упругой жесткости или просто тензором упругости*. Тензор, составленный из коэффициентов S_{ijkl}, называют *тензором упругой податливости*.

Так как тензоры деформации и напряжения являются симметричными тензорами второго ранга ($\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$; $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$), то независимых компонент S_{ijkl} и C_{ijkl} будет уже не 81, а только 36, поскольку в этом случае

$$S_{ijkl}=S_{jikl};\quad C_{ijkl}=C_{jikl}; \tag{4.26}$$
$$S_{ijkl}=S_{ijlk};\quad C_{ijkl}=C_{ijlk}.$$

Для кристаллов тензоры упругих модулей, каждый из которых составлен из 36 компонент, в свою очередь также являют-