Можно показать, что константы упругости E, G и ν связаны между собой выражением

$$G=E/[2(1+\nu)]. \tag{4.23}$$

Таким образом, зная две константы, можно всегда определить третью.

4.3. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Монокристаллические твердые тела являются телами анизотропными. В общем случае для монокристаллов любые произвольно выбранные направления по свойствам неэквивалентны.

Выше мы видели, что однородное напряжение и однородная бесконечно малая деформация описываются тензорами второго ранга, каждый из которых определяется девятью компонентами деформации ε_{ij} и девятью компонентами напряжения σ_{ij}. *Если деформация бесконечно мала и однородна, то каждая компонента тензора деформации линейно связана со всеми компонентами тензора напряжений и, наоборот, каждая компонента тензора напряжения линейно связана со всеми компонентами тензора деформаций.* В этом заключается сущность закона Гука для анизотропных твердых тел. Математический закон Гука для монокристаллов запишется

$$\varepsilon_{ij}=S_{ijkl}\,\sigma_{kl}, \tag{4.24}$$

либо как

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}, \tag{4.25}$$

где S_{ijkl} и C_{ijkl} — константы податливости и жесткости кристалла соответственно. Легко сообразить, что всего будет 81 компонента S_{ijkl} и 81 компонента C_{ijkl}.

Из теории упругости известно, что, если два тензора второго ранга связаны соотношением вида (4.24), (4.25), то величины $C_{ijkl}(S_{ijkl})$ образуют тензор четвертого ранга. Тензор, составленный из коэффициентов C_{ijkl}, называют *тензором упругой жесткости или просто тензором упругости*. Тензор, составленный из коэффициентов S_{ijkl}, называют *тензором упругой податливости*.

Так как тензоры деформации и напряжения являются симметричными тензорами второго ранга ($\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$; $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$), то независимых компонент S_{ijkl} и C_{ijkl} будет уже не 81, а только 36, поскольку в этом случае

$$\begin{aligned} S_{ijkl}&=S_{jikl}; \quad C_{ijkl}=C_{jikl};\\ S_{ijkl}&=S_{ijlk}; \quad C_{ijkl}=C_{ijlk}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Для кристаллов тензоры упругих модулей, каждый из которых составлен из 36 компонент, в свою очередь также являются симметричными, т. е. компоненты S_{ijkl} и C_{ijkl} симметричны и относительно перестановки пар индексов:

$$S_{ijkl}=S_{klij};\quad C_{ijkl}=C_{klij}. \tag{4.27}$$

Наличие таких равенств приводит к тому, что в общем случае число независимых компонент тензоров упругих модулей сокращается с 36 до 21 — столько констант имеет твердое тело, не обладающее никакой симметрией.

При решении многих конкретных задач для компонентов тензоров упругих модулей, деформации и напряжения полезна запись в матричных обозначениях, поскольку она уменьшает число индексов у компонентов.

При матричной записи двойное сочетание $ij=m$ $(ij=1, 2, 3)$ и $kl=n$ $(kl=1, 2, 3)$ заменяется одним индексом от 1 до 6 по следующей схеме: 11—1; 22—2; 33—3; 23, 32—4; 31, 13—5; 12, 21—6. В такой записи компоненты напряжения и деформации имеют вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & {}^1/_2\,\varepsilon_6 & {}^1/_2\,\varepsilon_5 \\ {}^1/_2\,\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & {}^1/_2\,\varepsilon_4 \\ {}^1/_2\,\varepsilon_5 & {}^1/_2\,\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Компоненты жесткости C_{ijkl} преобразуются по выше написанной схеме, а компоненты податливости — следующим образом:

$$S_{ijkl}={}^1/_2\,(1+\delta_{ij})\,{}^1/_2\,(1+\delta_{kl})\,S_{mn}, \tag{4.30}$$

где δ_{ij}, δ_{kl} — дельта-символ; $\delta_{i(k)j(l)}=1$, если $i(k)=j(l)=1$, $\delta_{i(k)j(l)}=0$, если $i(k)\neq j(l)$, т. е. $S_{1111}=S_{11}$, но $S_{1123}={}^1/_2\,S_{44}$, а $S_{2323}={}^1/_4\,S_{44}$. В матричном обозначении закон Гука запишется так:

$$\varepsilon_i=S_{ij}\,\sigma_j \quad (i, j=1, 2, ..., 6), \tag{4.31}$$

$$\sigma_i=C_{ij}\,\varepsilon_j \quad (i, j=1, 2, ..., 6). \tag{4.32}$$

Здесь m заменено на i, а n на j.

Коэффициенты упругой жесткости C_{ij} и упругой податливости S_{ij} можно представить в виде таблиц:

$$C_{ij}=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{vmatrix}. \quad S_{ij}=\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{vmatrix} \tag{4.33}$$

В матричной записи выражение (4.27) имеет вид $C_{ij}=C_{ji}$. Полное число упругих констант сокращается в зависимости от симметрии кристалла. Так, если кристалл обладает триклинной симметрией, то полное число упругих констант равио 21, а для кристаллов кубической симметрии оно равно 3. Основное свойство кубического кристалла состоит в том, что направления $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$ взаимно перпендикулярны и полностью эквивалентны. Это приводит к тому, что имеют место такие соотношения:

$$C_{11}=C_{22}=C_{33}; \quad C_{12}=C_{23}=C_{31}; \quad C_{44}=C_{55}=C_{66}.$$

Остальные компоненты C_{ij} равны нулю. Так что для кубического кристалла имеется всего лишь три независимых компоненты C_{11}, C_{12} и C_{44} и набор постояниых упругой жесткости сводится к матрице

$$C_{ij}=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{vmatrix}. \tag{4.34}$$

Между константами податливости и жесткости в зависимости от симметрии кристалла имеется определенная форма соотношения. Так, для всех классов кубической сингоиии

$$C_{11}=\frac{S_{11}+S_{12}}{(S_{11}-S_{12})(S_{11}+2S_{12})}; \quad C_{12}=\frac{-S_{12}}{(S_{11}-S_{12})(S_{11}+2S_{12})};$$

$$C_{44}=\frac{1}{S_{44}}. \tag{4.35}$$

Если для кристаллов выполняются следующие условия:

1) все силы взаимодействия между частицами, составляющими кристалл, центральные (как мы видели, для ковалентных кристаллов это условие не выполняется);

2) частицы сферически симметрнчны и расположены в центрах симметрии структуры;

3) в исходном состоянии какие-либо напряжения в кристалле отсутствуют, то это дает шесть дополнительных соотношений между коэффициентами упругости (которые были впервые установлены Коши):

$$\begin{gathered} C_{23}=C_{44}, \; C_{56}=C_{14}, \; C_{64}=C_{25}, \\ C_{31}=C_{55}, \; C_{12}=C_{66}, \; C_{45}=C_{36}. \end{gathered} \tag{4.36}$$

В случае кристаллов кубической симметрии соотношения Коши сводятся к равенству $C_{12}=C_{44}$.

Для металлов соотношеиия Коши выполияются плохо. По-видимому, в металлах силы взаимодействия не являются центральными, а атомы не обладают сферической симметрией. Для многих ионных кристаллов соотношения Коши выполняются хорошо — причем тем лучше, чем меньше доля ковалентной илн металлической связи.

4.4. ПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

При обсуждении диаграммы растяжения (см. рис. 4.9) обращалось внимание на то, что при приложении нагрузки к кристаллу сначала наблюдается очень небольшая область упругих деформацнй ($\varepsilon \ll 1\,\%$), для которой справедлив закон Гука. Следует заметить, что область упругих деформаций уменьшается с повышением температуры и становится ничтожно малой вблизи температуры плавления. В упругой области каждый атом кристалла лишь слегка смещается в направлении приложения нагрузки из своего положения равновесия в решетке. Вообще говоря, теория не позволяет предсказать значение предела упругости. Однако линейная зависимость между силой и упругой деформацией может быть объяснена тем, что кривую потенциальной энергии взаимодействия атомов (рис. 4.11) при малых смещениях можно аппроксимировать параболой $U=\beta x^2$. Отсюда сила

$$F=-\frac{dU}{dx}=-2\beta x. \qquad (4.37)$$

При значениях приложенного напряжения выше напряжения, соответствующего пределу упругости (точка А на рис. 4.9), кривая переходит в область ВС, для которой закон Гука не выполняется. Если теперь снять нагрузку, то исходная форма образца или его длина уже не восстанавливается. В результате возникает остаточная деформация, которая при низких температурах не зависит от времени приложения нагрузки. *Не зависящую от времени деформацию, которая сохраняется после снятия нагрузки, называют пластической.*

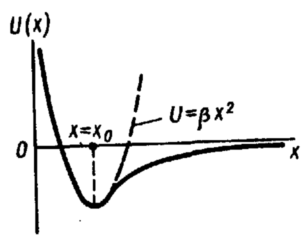

Рис. 4.11. Зависимость потенциальной энергии от расстояния между взаимодействующими атомами

Таким образом, предел текучести — это напряжение, при котором начинает появляться остаточная деформация. Практически пределы текучести и упругости совпадают, хотя резкого перехода от упругого к пластическому поведению обычно не наблюдается.

Итак, при увеличении растягивающего напряжения, при некотором зна-