5.2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В МОНОКРИСТАЛЛАХ

Процессы распространения упругих волн в кристаллах много сложнее процессов распространения электромагнитных волн. Электромагнитные волны всегда поперечны, упругие (звуковые) волны могут быть поперечными и продольными. Продольные волны — волны сжатий и растяжений, поперечные — волны деформаций сдвига. В каждом заданном направлении в кристалле распространяются в общем случае три поляризованные упругие волны с разными скоростями.

Рассмотрим распространение упругих волн в кристалле, плотность которого ρ. Внутри кристалла выберем элементарный параллелепипед с ребрами Δx, Δy, Δz, параллельными кристаллографическим осям координат x, y, z. Как и в случае упругой струны, при движении упругой волны по кристаллу каждая грань элементарного параллелепипеда под действием напряжения σ_{ij} совершает небольшие перемещения (в области упругости, когда справедлив закон Гука). Найдем уравнеиие движения для поступательного перемещения элементарного параллелепипеда при распространении упругой волны вдоль направления x (рис. 5.3).

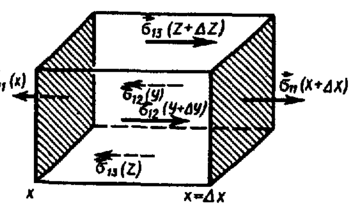

Рис. 5.3. Силы, действующие на элементарный параллелепипед при движении упругой волны в иаиаправленин O_x.

На грань x действует напряжение $\sigma_{11}(x)$, а на параллельную ей грань $x+\Delta x$ — напряжение $\sigma_{11}(x+\Delta x) \approx \sigma_{11} + \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}\Delta x$.

Результирующая сила, действующая в направлении x, равна $\left(\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$. Другие силы, действующие в направлении x, вызваны изменением внутри параллелепипеда напряжений σ_{12} и σ_{13}, так что в направлении x результирующая сила

$$F(x) = \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z. \qquad (5.7)$$

Обозначим u, v, ω компоненты вектора смещения центра масс параллелепипеда. Сила, согласно второму закону Ньютона, равна массе параллелепипеда $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$, умноженной на x-компоненту ускорения $\partial^2 u/\partial t^2$. Уравнение движения параллелепипеда в направлении x под действием напряжений принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}. \tag{5.8}$$

Если смещение u, v, ω обозначить через x_i, где $i=1, 2, 3$ и x_1 соответствует u, x_2—v, x_3—ω, то возможные уравнения движения можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (j=1, 2, 3), \tag{5.9}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Для кубического кристалла с учетом ограничений, налагаемых кубической симметрией на упругие постоянные C_{ij} [см. матрицу (4.42)], и выражений для компонент деформации [формулы (4.19), (4.20)] имеем

$$\sigma_{11} = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right);$$

$$\sigma_{12} = C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \sigma_{13} = C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

Подставив эти выражения в (5.8), получим уравнение движения для смещения u кубического кристалла:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} \right). \tag{5.10}$$

Уравнения движения для смещений v и ω легко получаются из (5.10) путем циклической перестановки:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} \right). \tag{5.11}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right). \tag{5.12}$$

Найдем решение уравнений движения для плоских волн, распространяющихся в направлении [100]. Решение уравнения (5.10) будем искать в виде продольной волны

$$u = u_0 \exp[i(\kappa x - \omega t)]. \tag{5.13}$$

Здесь u_0 — амплитуда колебаний; $|\vec{\kappa}| = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор.

Волновой вектор $\vec{\kappa}$ и смещение u направлены вдоль ребра куба и совпадают по направлению с осью x, т. е. вектор направлен по нормали к фронту волны.

После подстановки решения (5.13) в уравнение (5.10) получим

$$v_l = \omega/\kappa = \sqrt{C_{11}/\rho}, \tag{5.14}$$

где v_l — скорость распространения продольной упругой (звуковой) волны в направлении [100].

Другим решением будет поперечная волна или волна сдвига, с волновым вектором, направленным вдоль ребра куба, совпадающим по направлению с осью x, смещение же v происходит по направлению оси y:

$$v = v_0 \exp[i(\kappa x - \omega t)]. \tag{5.15}$$

После подстановки этого решения в уравнение (5.11) для смещения v получим

$$v_t = \omega/\kappa = \sqrt{C_{44}/\rho}, \tag{5.16}$$

где v_t — скорость распространения поперечной упругой волны в направлении [100].

Наконец, третье решение — это также волна сдвига с волновым вектором, направленным вдоль ребра куба, совпадающим по направлению с осью x, но смещение ω происходит по направлению z:

$$\omega = \omega_0 \exp[i(\kappa x - \omega t)]. \tag{5.17}$$

После подстановки этого решения в уравнение (5.12) для смещения ω получим

$$v_t = \sqrt{C_{44}/\rho}. \tag{5.18}$$

Таким образом, для одного и того же волнового вектора $\vec{\kappa}$, параллельного направлению [100], возникают три упругие волны — одна продольная и две поперечные. При этом две независимые волны сдвига имеют одинаковые скорости. *В случае произвольного направления вектора $\vec{\kappa}$ имеют место три поляризованные волны, распространяющиеся с разными скоростями, которые не зависят от частоты колебаний.* Как видно из выражений для скоростей (5.14), (5.16), (5.18), чем меньше плотность и чем больше жесткость кристалла, тем выше скорости распространения упругих (звуковых) волн. Из этих же выражений следует, что круговая частота колебаний ω пропорциональна волновому числу k, т. е. *дисперсионное соотношение получилось таким же, как и для случая упругой струны.*

5.3. КОЛЕБАНИЯ ОДНОАТОМНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ

В качестве одномерной модели твердого тела рассмотрим цепочку из N одинаковых атомов с массой M и межатомным расстоянием a (рис. 5.4), которые могут перемещаться вдоль прямой линии. Каждый атом в такой системе обладает одной степенью свободы, а вся система N — степенями свободы. Модель с точки зрения атомной структуры хорошо описывается линейной примитивной ячейкой Бравэ, в которой положения атомов определяются вектором трансляции $T=na$, где n — целое число, указывающее положение равновесия атомов в цепочке.

Допустим, в момент времени $t=0$ мы сместили из положения равновесия атом с номером $n=0$ на расстояние u_0. Так как атомы в цепочке связаны друг с другом силами связи, то такое возбуждение распространится по цепочке в виде волны сжатия и все остальные атомы сместятся из своих положений равновесия.

Пусть $u_n(x, t)$ есть смещение в какой-то момент времени n-го атома относительно его положения равновесия в точке с координатой $x_n=na$. Если смещения атомов из положений равновесия малы по сравнению с расстоянием a, то силы межатомного взаимодействия можно считать квазиупругими; согласно закону Гука, они пропорциональны смещениям. Атомы в цепочке как бы связаны между собой упругими пружинками, каждая из которых характеризуется упругой постоянной C, а смещение u_n описывает колебания атома вблизи положения равновесия.

Найдем уравнение движения n-го атома. При отыскании результирующей силы, действующей на n-й атом, будем считать, что имеют место только короткодействующие силы, это означает, что рассматриваемый атом взаимодействует лишь с ближайшими соседними $(n-1)$-м и $(n+1)$-м атомами, воздействие на него других атомов пренебрежимо мало. Уравнение

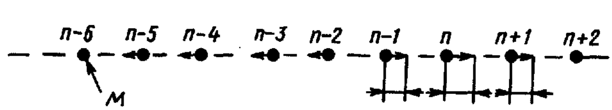

Рис. 5.4. Линейная цепочка из одинаковых атомов