

случаю показывает, что подвижность электронов, обусловленная рассеянием на ионизованных примесях, для вырожденного электронного газа не зависит от температуры:

$$\mu \sim v_F^3 = \text{const}, \quad (8.8)$$

т. к.  $v_F$  не меняется с температурой.

Этот результат объясняет, почему при низких температурах удельное сопротивление металла не изменяется с температурой.

До сих пор мы не учитывали взаимодействие электронов с электронами, т. е. пользовались приближением независимых электронов. Это приближение Друде оказалось неожиданно удачным. Отсутствие электрон-электронного взаимодействия является следствием принципа Паули. Ниже мы увидим, что при обсуждении ряда свойств твердых тел, таких, например, как магнитное упорядочение, сверхпроводимость, от этого приближения приходится отказаться.

Обратим внимание еще на одно упрощение, принятое в теории Друде и часто используемое до сих пор, — введение времени релаксации. Как мы уже неоднократно отмечали, предполагалось, что за единичное время любой электрон испытывает столкновение с вероятностью, равной  $\frac{1}{\tau}$ , т. е. считалось, что

результат столкновения не зависит от состояния электронов в момент рассеяния. Такое упрощение является чрезмерным. Частота столкновений электрона сильно зависит, например, от распределения других электронов, т. к. в силу принципа Паули электроны после столкновений могут переходить только на свободные уровни. Кроме того, как мы только что обсуждали, в твердом теле существуют различные механизмы рассеяния. Поэтому в ряде случаев от приближения времени релаксации отказываются. Вместо введения времени релаксации предполагают существование некоторой вероятности того, что за единичное время электрон из зоны с номером  $n$  и волновым вектором  $\vec{k}$  в результате столкновения перейдет в зону с волновым вектором  $\vec{k}_1$ . Эту вероятность находят с помощью соответствующих микроскопических расчетов. Такой подход, однако, очень сильно осложняет рассмотрение.

Детальный анализ показывает, что если процессы столкновения являются упругими и если рассеяние приводит к случайному распределению носителей заряда по скоростям, т. е. осуществляется равновероятное рассеяние частиц по всем направлениям, то описание процессов рассеяния можно вести, пользуясь понятием времени релаксации.

### 8.3. СОБСТВЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Рассмотрим полупроводник, не содержащий примесей и дефектов. Не будем также учитывать влияние поверхностных со-

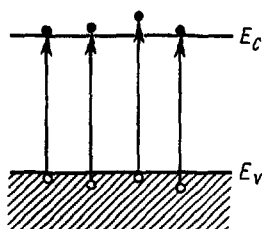


Рис. 8.3. Энергетическая диаграмма собственного полупроводника

стояний. При  $T=0$  К электропроводность такого полупроводника равна нулю, поскольку в нем нет свободных носителей заряда. Действительно, валентная зона полностью заполнена электронами и не дает никакого вклада в проводимость, а зона проводимости пуста. При  $T>0$  К появляется вероятность заброса электронов из валентной зоны в зону проводимости (рис. 8.3). В валентной зоне при этом образуются дырки. Ясно, что концентрация электронов  $n$  будет равна

концентрации дырок  $p$ :

$$n=p. \quad (8.9)$$

Одновременно с процессом образования свободных носителей (*генерацией*) идет процесс их исчезновения (*рекомбинации*). Часть электронов возвращается из зоны проводимости в валентную зону и заполняет разорванные связи (дырки). При данной температуре за счет действия двух конкурирующих процессов генерации и рекомбинации в полупроводнике устанавливается некоторая равновесная концентрация носителей заряда. Так, например, при комнатной температуре концентрация свободных электронов и дырок составляет в кремнии примерно  $10^{10}$  см<sup>-3</sup>, в германии приблизительно  $10^{13}$  см<sup>-3</sup>.

Если к полупроводнику приложить электрическое поле  $\vec{E}$ , то в нем возникает ток, складывающийся из электронной и дырочной составляющих. Полупроводники, в которых за счет перехода некоторого количества электронов из валентной зоны в зону проводимости образуется такое же количество дырок, называют *собственными*. Соответственно их проводимость, состоящую из электронной и дырочной составляющих, называют *собственной проводимостью*.

Приписав электронам в зоне проводимости и дыркам в валентной зоне эффективную массу, мы можем считать их свободными и воспользоваться выражением для электропроводности, полученным в модели свободных электронов Друде. Так, например, согласно (6.105), электронная составляющая тока будет

$$j=n e \langle v \rangle = \frac{n e^2 \tau}{m_n^*} E. \quad (8.10)$$

Здесь  $m_n^*$  — эффективная масса электрона,  $\tau$  — как и раньше, время релаксации. Отсюда для удельной электропроводности, связанной с дрейфом электронов, получаем

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_n^*}. \quad (8.11)$$

Часто, однако, выражение для  $j$  и  $\sigma$  записывают несколько иначе. Как и для металлов, введем подвижность электронов, численно равную скорости дрейфа в электрическом поле единичной напряженности:

$$\mu_n = \frac{\langle v \rangle}{E}. \quad (8.12)$$

С учетом (8.12) для  $j$  и  $\sigma$  имеем:

$$j = n e \mu_n E, \quad (8.13)$$

$$\sigma = n e \mu_n. \quad (8.14)$$

При этом

$$\mu_n = \frac{e \tau}{m_n^*}. \quad (8.15)$$

Аналогичные выражения можно написать и для дырочной составляющей. Результирующая электропроводность собственного полупроводника определяется суммой электронной и дырочной компонент

$$\sigma = e n \mu_n + e p \mu_p, \quad (8.16)$$

где  $\mu_p$  — подвижность дырок. В (8.16) входят два важнейших параметра полупроводника — концентрация и подвижность носителей заряда.

**Концентрация носителей.** Равновесная концентрация электронов, для которых возможный интервал энергий лежит в пределах зоны проводимости, определяется выражением

$$n = \int_{E_c}^{E_{c \max}} N(E) f(E) dE, \quad (8.17)$$

где  $N(E)$  — плотность состояний, т. е. число состояний в единичном интервале энергий в единице объема кристалла,  $f(E)$  — функция Ферми — Дирака, определяющая вероятность того, что состояние занято электроном. Пользуясь результатами вычисления плотности состояний, полученными в гл. 6, и учитывая, что для стандартной зоны проводимости  $E(\kappa)$  имеет вид

$$E = E_c + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2 m_n^*} = E_c + \frac{p^2}{2 m_n^*}, \quad (8.18)$$

для  $N(E)$  получаем

$$N(E) = 4 \pi \left( \frac{2 m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}. \quad (8.19)$$

Аналогично для валентной зоны, у верхнего края которой

$$E = E_v - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2 m_p^*} = E_v - \frac{p^2}{2 m_p^*}, \quad (8.20)$$

имеем

$$N(E) = 4 \pi \left( \frac{2 m_p^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_v - E)^{1/2}. \quad (8.21)$$

Подставляя (8.19) и выражение (6.46) для  $f(E)$  в (8.17), находим

$$n = \int_E^\infty \frac{4 \pi \left( \frac{2 m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} dE}{\frac{e^{E - E_F}}{\kappa_B T} + 1}. \quad (8.22)$$

Интегрирование в (8.22) нужно провести от дна зоны  $E_c$  до ее потолка. Однако функция Ферми—Дирака при  $E > E_F$  быстро спадает до нуля, и поэтому верхний предел интегрирования в (8.22) заменен на бесконечность.

Введем безразмерные переменные

$$\frac{E - E_c}{\kappa_B T} = \varepsilon; \quad \frac{E_F - E_c}{\kappa_B T} = \eta. \quad (8.23)$$

Величины  $\varepsilon$  и  $\eta$  представляют собой приведенные в единицах  $\kappa_B T$  энергию электрона в зоне проводимости и уровень Ферми, отсчитанные от дна зоны  $E_c$ . С учетом этого выражение (8.22) преобразуется к виду

$$n = 4 \pi \left( \frac{2 m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (\kappa_B T)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon - \eta} + 1} = N_c F_{1/2}(\eta). \quad (8.24)$$

Величина

$$N_c = 2 \left( \frac{2 \pi m_n^* \kappa_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (8.25)$$

получила название эффективной плотности состояний в зоне проводимости, а

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon - \eta} + 1} \quad (8.26)$$

— интеграл Ферми—Дирака порядка  $1/2$ . Формулу (8.24) можно записать в более удобном для расчетов виде, если в (8.25) подставить численные значения универсальных постоянных:

$$n = 4,82 \times 10^{15} \left( \frac{m_n^*}{m} \right)^{3/2} T^{3/2} F_{1/2}(\eta). \quad (8.27)$$

Найдем теперь равновесную концентрацию дырок в валентной зоне

$$p = \int_{E_{v \text{ min}}}^{E_v} N(E) f_p(E) dE. \quad (8.28)$$

Здесь  $f_p(E)$  — функция распределения для дырок. Вероятность того, что в состоянии теплового равновесия на уровне с энергией  $E$  отсутствует электрон, т. е. что этот уровень занят дыркой, равна

$$f_p(E) = 1 - f(E) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{E_F-E}{k_B T}} + 1}. \quad (8.29)$$

С учетом (8.29), а также (8.21) выражение для концентрации дырок принимает вид

$$p = 4\pi \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{E_v} \frac{(E_v - E)^{1/2} dE}{e^{\frac{E_F - E}{k_B T}} + 1}. \quad (8.30)$$

Нижний предел интегрирования здесь заменен на  $-\infty$ . Это можно сделать, если учесть, что функция  $f_p(E)$  быстро спадает.

Используя безразмерные переменные (8.23), а также введя новые обозначения

$$\frac{E_c - E_v}{k_B T} = \frac{E_g}{k_B T} = \varepsilon_i; \quad \frac{E_v - E}{k_B T} = \varepsilon_p; \quad (8.31)$$

$$\frac{E_F - E}{k_B T} = \eta + \varepsilon_i + \varepsilon_p.$$

Приведем (8.30) к виду  $p = N_v F_{1/2}(-\eta - \varepsilon_i)$ , (8.32)

где  $N_v$  — эффективная плотность состояний в валентной зоне

$$N_v = 2 \left( \frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}. \quad (8.33)$$

Интеграл Ферми—Дирака для валентной зоны имеет вид

$$F_{1/2}(-\eta - \varepsilon_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_p^{1/2} d\varepsilon_i}{e^{\varepsilon_p + \eta + \varepsilon_i} + 1}. \quad (8.34)$$

Видим, что для определения концентрации электронов и дырок необходимо вычислить интегралы Ферми—Дирака. Эти инте-

гралы не вычисляются точно, но для них имеются приближенные выражения, справедливые для определенных областей изменения аргумента, которые значительно упрощают формулы для концентрации электронов и дырок:

$$F_{1/2}(\xi) = \begin{cases} e^{\xi} & \text{при } -\infty < \xi < -1 \\ \frac{1}{0,27 + e^{\xi}} & \text{при } -1 < \xi < 5 \end{cases} \quad (8.35)$$

$$(8.36)$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{3/2} & \text{при } 5 < \xi < \infty \end{cases} \quad (8.37)$$

Приближение (8.35) соответствует статистике Больцмана. Оно справедливо при  $\eta = \frac{E_F - E_c}{\kappa_B T} < -1$ , т. е. при  $E_F < E_c - \kappa_B T$ .

Таким образом, если уровень Ферми лежит ниже дна зоны проводимости более чем на  $\kappa_B T$ , то полупроводник описывается классической статистикой, т. е. является невырожденным. Если  $E_F$  лежит выше  $E_c$  более чем на  $5 \kappa_B T$ , то полупроводник полностью вырожден. Аппроксимация (8.36), справедливая для случая  $E_c - \kappa_B T < E_F < E_c + 5 \kappa_B T$ , пригодна для описания полупроводников с промежуточными (от невырожденных к полностью вырожденным) свойствами.

Используя приближение (8.35) и учитывая (8.27), находим концентрацию электронов в невырожденном собственном полупроводнике:

$$n = 4,82 \times 10^{15} \left( \frac{m_n^*}{m} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{E_c - E_F}{\kappa_B T}} \quad (8.38)$$

Она зависит от температуры, причем эта зависимость определяется, в основном, экспоненциальным членом.

Для полностью вырожденного полупроводника из (8.27) с учетом (8.25) и (8.37) получаем

$$n = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_c \left( \frac{E_F - E_c}{\kappa_B T} \right)^{3/2} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} (E_F - E_c) \quad (8.39)$$

т. е. концентрация от температуры не зависит.

Из (8.35) — (8.37) легко получить приближенные выражения для  $F_{1/2}(-\eta - \varepsilon_i)$ :

$$F_{1/2}(-\eta - \varepsilon_i) = \begin{cases} e^{-\eta - \varepsilon_i} & \text{для } -\infty < -\eta - \varepsilon_i < -1, \end{cases} \quad (8.40)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{0,27 + e^{-\eta - \varepsilon_i}} & \text{для } -1 < -\eta - \varepsilon_i < 5, \end{cases} \quad (8.41)$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (-\eta - \varepsilon_i)^{3/2} & \text{для } 5 < -\eta - \varepsilon_i < \infty. \end{cases} \quad (8.42)$$

При  $\frac{E_v - E_F}{\kappa_B T} < -1$  или  $E_F > E_v + \kappa_B T$  полупроводник является невырожденным, а при  $E_F < E_v - 5 \kappa_B T$  — полностью вырожденным.

Принимая во внимание (8.40) и (8.42), из (8.32) получаем для концентрации дырок в невырожденном полупроводнике

$$p = 4,82 \times 10^{15} \left( \frac{m_p^*}{m} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{E_F - E_v}{\kappa_B T}} \quad (8.43)$$

и в полностью вырожденном:

$$p = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_v \left( \frac{E_v - E_F}{\kappa_B T} \right)^{3/2} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right) (E_v - E_F). \quad (8.44)$$

Полученные выражения для  $n$  и  $p$  позволяют вычислять концентрацию электронов и дырок, если известно положение уровня Ферми. Поскольку положение уровня Ферми определяется условием электронейтральности собственного полупроводника, его можно найти, решив уравнение  $n=p$  или

$$N_c F_{1/2}(\eta) = N_v F_{1/2}(-\eta - \epsilon_i). \quad (8.45)$$

Для невырожденного полупроводника (8.45) принимает вид

$$N_c e^\eta = N_v e^{-\eta - \epsilon_i}. \quad (8.46)$$

Отсюда легко найти уровень Ферми:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{\kappa_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} \quad (8.47)$$

или с учетом выражений (8.25) и (8.33) для  $N_c$  и  $N_v$

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \kappa_B T \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^{3/4}. \quad (8.48)$$

Если  $m_p^* = m_n^*$ , то положение уровня Ферми в собственном полупроводнике не зависит от температуры и он лежит в середине запрещенной зоны. При  $m_p^* \neq m_n^*$   $E_F$  расположен в центре запрещенной зоны только для  $T=0$  К. С повышением температуры он линейно смещается к той зоне, в которой меньше эффективная масса носителей. Это иллюстрируется рисунком 8.4.

Учитывая, что в собственном полупроводнике  $n=p=n_i$ , определим собственную концентрацию носителей заряда:

$$n_i = (n \cdot p)^{1/2} = (N_c N_v)^{1/2} \exp \left( -\frac{E_c - E_v}{2\kappa_B T} \right) \quad (8.49)$$

или с учетом выражений для  $N_c$  и  $N_v$ :

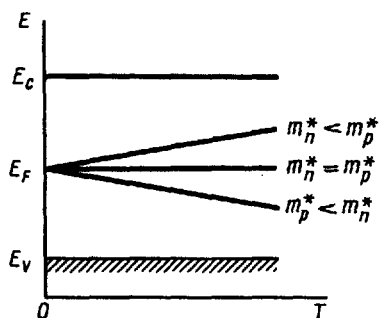


Рис. 8.4. Зависимость уровня Ферми от температуры в собственном полупроводнике

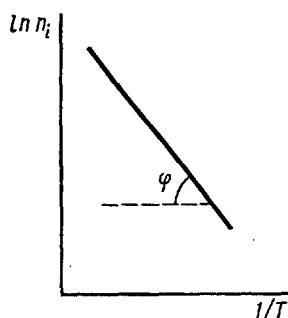


Рис. 8.5. Зависимость концентрации носителей в собственном полупроводнике от температуры, построенная в координатах  $\ln n_i$  от  $1/T$

$$n_i = 2 \left( \frac{2\pi\kappa_B}{h^2} \right)^{3/2} (m_n^* m_p^*)^{3/4} T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2\kappa_B T}\right). \quad (8.50)$$

Концентрация носителей (электронов и дырок) в невырожденном собственном полупроводнике оказалась не зависящей от положения уровня Ферми. Она увеличивается с температурой по экспоненциальному закону с энергией активации, равной половине ширины запрещенной зоны.

Температурная зависимость концентрации собственных носителей, построенная в координатах  $\ln n_i$  от  $\frac{1}{T}$ , представляет собой практически прямую линию:

$$\ln n_i = \text{const} + \frac{3}{2} \ln \frac{1}{T} - \frac{E_g}{2\kappa_B} \cdot \frac{1}{T}, \quad (8.51)$$

т. к. функцией  $\ln \frac{1}{T}$  можно пренебречь по сравнению с членом  $\frac{1}{T}$  (рис. 8.5). Тангенс угла наклона этой прямой равен половине ширины запрещенной зоны:

$$\text{tg } \varphi = -\frac{E_g}{2\kappa_B}. \quad (8.52)$$

Один из способов определения ширины запрещенной зоны полупроводника заключается в нахождении угла наклона экспериментальных прямых  $\ln n_i$  от  $\frac{1}{T}$ .

Из (8.48) следует, что с ростом температуры из-за прибли-



жения уровня Ферми к зоне с «легкими» носителями полупроводник может из невырожденного превратиться в вырожденный. Вырождение наступает, когда расстояние между  $E_F$  и границей зоны становится соизмеримо с величиной  $k_B T$ . При этом, если вырождение наступило, например, в зоне проводимости, то в валентной зоне оно отсутствует, т. к. с ростом  $T$  уровень Ферми отдалается от нее все больше и больше. В этом случае выражение для концентрации носителей в вырожденном собственном полупроводнике примет вид:

$$n_i = N_c F_{1/2}(\eta) = N_v e^{-\eta - \epsilon_i} \quad (8.53)$$

Здесь интеграл Ферми—Дирака  $F_{1/2}(\eta)$  уже нельзя заменять экспонентой. Ясно, что вырождение в собственном полупроводнике наступает только в том случае, когда эффективные массы электронов и дырок значительно различаются. Примером такого полупроводника является индийский антимонид (InSb), в котором  $m_p^* \approx 10 m_n^*$

**Подвижность носителей** в собственном полупроводнике, где нет никаких примесей и дефектов, время релаксации определяется рассеянием носителей на фононах. При обсуждении закона Видемана — Франца мы отмечали (глава 6), что средняя длина свободного пробега электрона обратно пропорциональна концентрации фононов, которая, в свою очередь, в области высоких температур пропорциональна температуре. Таким образом,

$$\lambda \sim \frac{1}{\langle n \rangle} \sim \frac{1}{T} \quad (8.54)$$

В невырожденном электронном газе средняя скорость движения электронов  $v$  пропорциональна  $T^{1/2}$ . С учетом этого получаем, что подвижность, обусловленная рассеянием на фононах,

$$\mu = \frac{e \lambda_e}{m v} \sim \frac{T^{-1}}{T^{1/2}} \sim T^{-3/2} \quad (8.55)$$

Сделанные нами рассуждения справедливы для невырожденного электронного газа. В этом случае электроны в зоне проводимости мало, и поэтому все электроны принимают независимо друг от друга участие в электропроводности.

Если электронный газ вырожден, то, так же как и в металле, вклад в проводимость вносят электроны, которые располагаются вблизи уровня Ферми. Следовательно, в качестве времени релаксации здесь нужно взять:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_F} \quad (8.56)$$

где  $\lambda$  — длина свободного пробега электронов, обладающих энергией, близкой к  $E_F$ ,  $v_F$  — их скорость движения. Поскольку

$v_F$  от температуры практически не зависит, для подвижности вырожденного электронного газа получаем:

$$\mu \sim \frac{T^{-1}}{\text{const}} \sim T^{-1}. \quad (8.57)$$

Учитывая (8.55) и (8.57), а также полученные выше выражения для концентрации носителей в невырожденных (8.49) и вырожденных (8.39) полупроводниках, можем сделать вывод о температурной зависимости электропроводности собственных полупроводников. Так, например, электропроводность невырожденных собственных полупроводников увеличивается с ростом температуры по экспоненциальному закону.

#### 8.4. ПРОВОДИМОСТЬ ПРИМЕСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Если в полупроводник введена донорная или акцепторная примесь, то при низких температурах, когда энергии тепловых колебаний недостаточно для переброса электронов из валентной зоны в зону проводимости, свободные носители заряда могут появиться за счет ионизации примесных уровней. Энергия ионизации мелких доноров или акцепторов, как было показано выше, незначительна по сравнению с шириной запрещенной зоны. Поэтому связанный с донорным атомом электрон достаточно легко может быть оторван от этого атома, т. е. переведен с донорного уровня в зону проводимости (рис. 8.6, а). Чем выше температура, тем больше доноров отдаст свои электроны. С повышением температуры, конечно, увеличивается и вероятность межзонных переходов. Однако в данном полупроводнике количество электронов в зоне проводимости будет значительно больше, чем количество дырок в валентной зоне. В силу этого электропроводность полупроводника, содержащего доноры, будет *электронной*. Электроны являются *основными носителями заряда*, дырки — *неосновными*. Такой полупроводник называется *электронным (или донорным)*.

В полупроводнике, содержащем акцепторную примесь, электроны легко переходят из валентной зоны на акцепторные уровни. При этом в валентной зоне образуются свободные дырки. Количество свободных дырок здесь будет значительно больше, чем количество свободных электронов, образовавшихся за счет переходов из валентной зоны

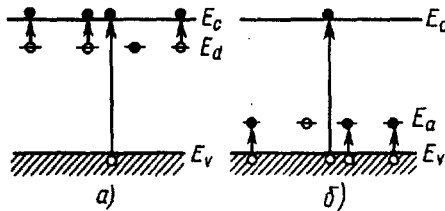


Рис. 8.6. Энергетическая диаграмма электронного (а) и дырочного (б) полупроводников

электроны легко переходят из валентной зоны на акцепторные уровни. При этом в валентной зоне образуются свободные дырки. Количество свободных дырок здесь будет значительно больше, чем количество свободных электронов, образовавшихся за счет переходов из валентной зоны