

$$\langle P \rangle = \frac{P_0^2 E}{3 \kappa_B T} \left(1 - \frac{P_0^2 E^2}{15 \kappa_B T} + \dots \right). \quad (9.56)$$

При $\frac{P_0 E}{\kappa_B T} \ll 1$ член $\frac{P_0^2 E^2}{15 \kappa_B T}$ и все последующие члены ряда можно вследствие малости не учитывать. Тогда

$$\langle P \rangle = \frac{P_0^2 E}{3 \kappa_B T}, \quad (9.57)$$

т. е. при малых полях средний дипольный момент в направлении поля прямо пропорционален полю. Поляризуемость полярных молекул равна, таким образом,

$$\alpha_{dT} = \frac{P_0^2}{3 \kappa_B T}. \quad (9.58)$$

Точно такое же выражение получается и при более грубом расчете (см. 9.50).

В то же время из (9.56) следует, что в сильных полях, когда потенциальная энергия диполя в электрическом поле сравнима с тепловой энергией ($\frac{P_0 E}{\kappa_B T} \sim 1$), средний дипольный момент в направлении поля уже не пропорционален полю. При увеличении поля $\langle P \rangle$ растет, стремясь постепенно к насыщению.

Заканчивая рассмотрение различных видов поляризаций, отметим, что поляризация реальных диэлектриков имеет обычно сложный характер. Она является совокупностью отдельных простейших видов поляризации. В общем случае результирующий дипольный момент единицы объема диэлектрика равен

$$\vec{P} = \left(\sum_m n_m \alpha_m \right) \vec{E}, \quad (9.59)$$

где α_m — поляризуемость m -го вида поляризации, n_m — концентрация частиц, участвующих в m -м виде поляризации. Если в диэлектрике имеются все рассмотренные выше механизмы поляризации, то $m=1, 2, \dots, 6$.

9.9. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ И ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ

Из § 9.1 следует, что важнейший макроскопический параметр диэлектрика — диэлектрическая проницаемость ϵ — связана с вектором поляризации \vec{P} и полем \vec{E} соотношением

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}. \quad (9.60)$$

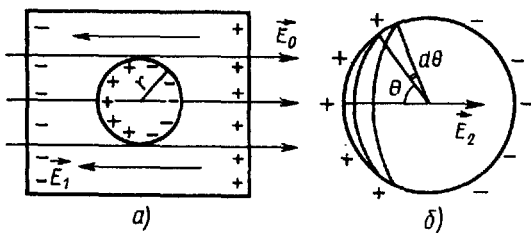


Рис. 9.9. К расчету локального поля методом Лорентца

На первый взгляд кажется, что знание механизмов поляризации, позволяющее произвести вычисление различных видов поляризуемости и, следовательно, вектора поляризации по формуле (9.59) позволяет легко вычислить ϵ . Однако сделать это не всегда просто. Дело в том, что электрическое поле, действующее на атом или молекулу внутри диэлектрика (назовем это поле *локальным* — $E_{\text{лок}}$), не совпадает со средним макроскопическим полем \vec{E} в диэлектрике. Каждая молекула (или атом) находится, прежде всего, в поле действия окружающих молекул. Это поле изменяется при наложении внешнего поля, т. к. молекулы поляризуются. Впервые метод расчета локального поля был предложен Лорентцем. Этот метод применим для газов, неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии.

Действующее на какую-либо молекулу внутри кристалла поле $\vec{E}_{\text{лок}}$ можно представить в виде суммы:

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3, \quad (9.61)$$

где \vec{E}_0 — внешнее поле, \vec{E}_1 — так называемое *деполяризующее поле*, обусловленное зарядами, появившимися на поверхности диэлектрика в результате поляризации образца (см. рис. 9.9),

\vec{E}_2 и \vec{E}_3 — поля, происхождение которых будет выяснено ниже.

Сумма $\vec{E}_0 + \vec{E}_1$ представляет собой макроскопическое поле в диэлектрике \vec{E} , создаваемое электрическими зарядами, расположенными вне диэлектрика (\vec{E}_0), и поляризацией диэлектрика (\vec{E}_1). Поскольку поле \vec{E}_1 направлено противоположно направлению вектора поляризации, его и называют *деполяризующим*.

Величина поля \vec{E} может быть найдена из (9.6):

$$E = \frac{P}{\epsilon_0(\epsilon - 1)}. \quad (9.62)$$

Для выяснения физического смысла полей E_2 и E_3 вырежем мысленно в диэлектрике сферу, в центре которой находится выбранная нами молекула. Радиус сферы r должен быть значительно больше расстояния между молекулами. Тогда диэлектрик, расположенный вне сферы, можно рассматривать как непрерывную среду. С другой стороны, r должен быть мал по сравнению с размерами образца. Оба эти условия удовлетворяются при r , равном нескольким десяткам межатомных расстояний.

Действие молекул, находящихся вне сферы, на рассматриваемую молекулу будем описывать полем \vec{E}_2 , а действие молекул, расположенных внутри сферы, — полем \vec{E}_3 . Идея введения такой сферы, получившей название *сферы Лорентца*, состоит в том, что поле \vec{E}_3 внутри сферы можно трактовать микроскопически, а поле \vec{E}_2 , действующее со стороны оставшейся части образца, — макроскопически.

Вычислим величину поля \vec{E}_2 . Для этого предположим, что все молекулы внутри сферы Лорентца, кроме выбранной нами, изъяты. Поскольку диэлектрик поляризован, на поверхности сферы имеется некоторый связанный заряд. Задача сводится к нахождению электрического поля, создаваемого поляризованной диэлектрической сферой.

Выделим на сфере элементарную поверхность dS в виде кольца, расположенного под углом θ к направлению внешнего поля. Заряд на поверхности dS обозначим через dq . Напряженность поля, созданного зарядом dq , в центре сферы

$$dE_2 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta. \quad (9.63)$$

Заряд dq равен произведению плотности заряда $\rho_{\text{п}}$ на площадь кольца, т. е. $dq = \rho_{\text{п}} dS$. Плотность заряда на сфере зависит как от величины поляризации диэлектрика, так и от угла θ :

$$\rho_{\text{п}} = P \cos\theta.$$

Учитывая, что $dS = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$, получаем

$$dq = P \cos\theta \cdot 2\pi r^2 \sin\theta d\theta.$$

Подставим полученное выражение в (9.63) и выполним интегрирование по всей поверхности сферы Лорентца:

$$E_2 = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (9.64)$$

Вычисление напряженности поля \vec{E}_3 , т. е. поля, создаваемого молекулами, расположенными внутри сферы Лорентца, не может быть выполнено без учета структуры диэлектрика. В случае газов, неполярных жидкостей или кубических кристаллов

можно считать $\vec{E}_3=0$. Действительно, при хаотическом распределении молекул (газ, неполярная жидкость) для каждой молекулы внутри сферы Лорентца всегда можно найти другую, действие которой на выбранную нами молекулу компенсирует действие первой. В кристаллах такая компенсация возможна для высокосимметричных структур (например, кубических).

Итак, в приближении Лорентца $\vec{E}_3=0$. С учетом изложенного

$$E_{\text{лок}} = \frac{P}{\epsilon_0(\epsilon-1)} + \frac{P}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon+2}{\epsilon-1} \cdot \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (9.65)$$

Подставляя (9.65) в (9.59), находим

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{1}{3\epsilon_0} \sum_m n_m \alpha_m. \quad (9.66)$$

Уравнение (9.66), известное как *уравнение Клаузиуса—Мосотти*, устанавливает связь между диэлектрической проницаемостью и поляризуемостью. Еще раз подчеркнем, что оно справедливо лишь для тех кристаллических структур, для которых в силу симметрии поле $\vec{E}_3=0$.

9.10. ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Если диэлектрик помещен в постоянное электрическое поле, то все виды поляризации, присущие данному веществу, успевают установиться. В этом случае вклад в ϵ вносят как быстрые, так и медленные механизмы поляризации. В переменном электрическом поле с увеличением частоты ν начинают запаздывать сначала наиболее медленные, а затем другие виды поляризации. Это приводит к изменению диэлектрической проницаемости (к *дисперсии* ϵ).

Общий вид зависимости $\epsilon(\nu)$ показан на рис. 9.10. В области низких частот вклад в ϵ вносят все виды поляризации, однако при $\nu=10^4 \div 10^5$ Гц начинают «выключаться» различные виды объемно-зарядной поляризации, связанной с движением и накоплением на границах раздела неоднородного диэлектрика заряженных частиц (электронов, ионов). В диапазоне радиочастот (10^4 — 10^{11} Гц) перестают вносить вклад в ϵ тепловые механизмы поляризации (электронная, ионная и дипольная).