Основной величиной, характеризующей электрическое поле в данной точке, является напряженность поля $\vec{E}$ (часто ее называют электрическим вектором, а иногда говорят о поле, подразумевая напряженность). Для исследования поля используется положительный пробный заряд, который должен быть точечным и достаточно малым по величине, чтобы не вносить существенных искажений в исследуемое поле.

Пусть на пробный заряд q, помещенный в исследуемую точку (точку наблюдения), поле действует с силой $\vec{f}$. Тогда напряженность поля $\vec{E}$ определяется отношением

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}. \qquad (2.4)$$

Итак, напряженность поля в данной точке равна отношению силы, с которой поле действует на пробный заряд, помещенный в эту точку, к величине пробного заряда. Можно также определить напряженность поля как вектор, численно равный силе, с которой поле действует на внесенный в точку наблюдения единичный пробный заряд, и совпадающий по направлению с этой силой. Важно запомнить, что любая точка поля характеризуется своей напряженностью, не зависящей от величины пробного заряда. Единица напряженности СИ:

$$1\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{1}{3\cdot 10^4}\text{ ед. напряженности СГС.}$$

Очень часто требуется вычислить силу $\vec{f}$, с которой поле действует на заряд q в точке с известной напряженностью $\vec{E}$. Из (2.4) имеем:

$$\vec{f} = q\vec{E}. \qquad (2.5)$$

§ 3. ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ, ОБЪЕМНЫХ, ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Во многих практических приложениях возникает необходимость определения напряженности поля при заданном распределении зарядов. Существует ряд приемов решения такой задачи, известной под названием прямой задачи электростатики. С одним из этих приемов мы знакомимся ниже, начиная с простейшего примера вычисления поля точечного заряда.

Требуется исследовать поле точечного заряда Q, расположенного в точке M с координатами x_0, y_0, z_0 в электрически однородной среде ($\varepsilon = \text{const}$). Ищем напряженность поля в точке наблюдения A с координатами x, y, z (рис. 1). Из точки «истока», где находится заряд Q, проводим радиус-вектор в точку наблюдения. На пробный заряд q, помещенный в точку A, поле дей-

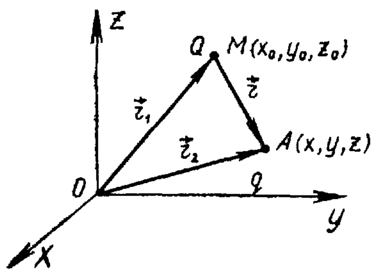

Рис. 1

ствует с силой $\vec{f}$, определяемой по закону Кулона:

$$\vec{f} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}. \tag{3.1}$$

Из (2.4) и (3.1) имеем в СИ:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}. \tag{3.2}$$

Определение вектора напряженности (как экспериментальным, так и расчетным путем) обычно сводится к нахождению его проекций* в избранной системе отсчета:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{Qr_x}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} = \frac{Q(x-x_0)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}, \\ E_y &= \frac{Qr_y}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} = \frac{Q(y-y_0)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}, \\ E_z &= \frac{Qr_z}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} = \frac{Q(z-z_0)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}, \end{aligned}\right| \tag{3.3}$$

исходя из которых затем находят модуль $|\vec{E}|$ и направляющие косинусы:

$$\left.\begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}, \\ \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{x}}) &= \frac{E_x}{E} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right| \tag{3.4}$$

Если поле обусловлено несколькими точечными зарядами, то результирующая напряженность поля в точке наблюдения находится как векторная сумма напряженностей полей, обусловленных отдельными зарядами; в общем случае n точечных зарядов

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) выражает принцип суперпозиции электрических полей, справедливый при любом характере распределения зарядов (если при этом уравнения поля линейны). Справедливость принципа суперпозиции электрических полей не является очевидной, иными словами, этот принцип не вытекает из других, более общих законов, и в его правильности убеждает физический эксперимент.

Из соотношения (3.2) или (3.3) видно, что напряженность поля точечных зарядов всюду (за исключением точек истока)

* В курсах электродинамики вместо термина «проекция вектора» часто применяют термин «составляющая вектора» (имея в виду проекцию).

конечна, непрерывна и в бесконечности обращается в нуль. По мере приближения точки наблюдения к точечному заряду напряженность поля неограниченно возрастает и в точке расположения заряда обращается в бесконечность. Обращение физической величины в бесконечность обусловлено нарушением требования, сформулированного при введении абстракции «точечный заряд»: рассматривать поле в точках, удаленных от заряженного тела (или частицы) на расстояние r, удовлетворяющего условию $r \gg l$ (где l — линейный размер заряженного тела или частицы).

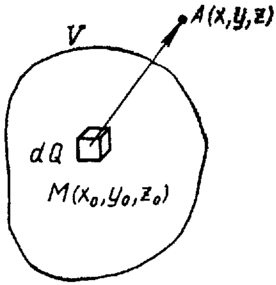

Рис. 2

В ряде случаев (грозовая туча, плазма, атомные ядра) заряды распределены в конечных объемах. Представим себе заряд Q (рис. 2), непрерывно распределенный в объеме V, и вычислим поле этого заряда в произвольной точке наблюдения A, лежащей вне указанного объема (при $\varepsilon = \text{const}$). Выделим в этом объеме элемент dV столь малый, чтобы находящийся в нем заряд dQ мог бы считаться точечным; пусть x_0, y_0, z_0 — координаты этого точечного заряда. Проводим радиус-вектор $\vec{r}$ в точку наблюдения $A(x, y, z)$ и считаем, что точечный заряд dQ создает в точке A поле элементарной напряженности $d\vec{E}$, которая в соответствии с (3.2) может быть записана в виде

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}. \tag{3.6}$$

Вводим объемную плотность заряда ρ: $\rho = \frac{dQ}{dV}$, $dQ = \rho\, dV$, после чего (3.6) перепишем так:

$$d\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}dV. \tag{3.7}$$

Напряженность результирующего поля, обусловленного всеми зарядами объема V в точке A, согласно принципу суперпозиции полей выражается объемным интегралом

$$\vec{E} = \int\limits_V \frac{\rho\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho\vec{r}}{r^3}dV, \tag{3.8}$$

где интегрирование проводится по всему объему заряженного тела (здесь, как и в дальнейшем, интегрирование по объему V и по поверхности S выражается символами соответственно $\int\limits_V$ и $\int\limits_S$). В общем случае ρ может быть переменной величиной, т. е.

является функцией координат. Вынесение ε за знак интеграла выражает условие однородности среды ($\varepsilon = \text{const}$).

Определение $\vec{E}$ сводится к нахождению трех скалярных интегралов:

$$E_x = \int\limits_V \frac{\rho(x-x_0)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} dV \quad \text{и т. д.} \tag{3.9}$$

Примем без доказательства, что напряженность поля в однородной среде при объемном распределении заряда всюду (и внутри заряженного тела) конечна, непрерывна и в бесконечности обращается в нуль.

Обращаем внимание на макроскопический характер введенной величины объемной плотности заряда. Реальное распределение зарядов в любом веществе характеризуется огромной неоднородностью: внутри атомных ядер плотность зарядов велика, рядом с ядрами, где нет зарядов, она равна нулю. Как показывают опыт и теория, можно почти во всех случаях (исключая задачи атомной и ядерной физики) не учитывать дискретного распределения в пространстве электрических зарядов и пользоваться представлением о непрерывном распределении электрических зарядов в заряженных телах. Объемная плотность ρ и представляет собой плотность этих «размазанных» по объему зарядов.

В ряде случаев допустима другая абстракция — поверхностный заряд. Примером может служить заряженный проводник, в котором, как известно, заряды распределены в чрезвычайно тонком поверхностном слое. Рассуждения при выводе формулы напряженности поля поверхностных зарядов вполне аналогичны приведенным выше: выделяется достаточно малый элемент поверхности dS, вводится поверхностная плотность зарядов $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ и т. д Результирующая напряженность определяется поверхностным интегралом

$$\vec{E} = \int\limits_S \frac{\sigma \vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} dS. \tag{3.10}$$

Напряженность поля при поверхностном распределении зарядов во всех точках, не расположенных на заряженной поверхности, конечна, непрерывна и в бесконечности обращается в нуль. Поведение вектора напряженности в точках, лежащих на заряженной поверхности, будет рассмотрено в § 17.

Линейное распределение зарядов — очередная абстракция, примером которой может служить заряженный тонкий провод длиной l.

Рассуждая, как в предыдущих случаях, и вводя линейную плотность заряда $k=\frac{dQ}{dl}$, получаем:

$$\vec{E}=\int\limits_{l}\frac{k\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}dl. \qquad (3.11)$$

В школьном курсе физики (с учетом уровня математических знаний учащихся), помимо поля точечного заряда, рассматриваются поле поверхностно заряженного шара и поле бесконечной плоскости. В первом случае (в неявной форме) используется радиально-сферическая симметрия поля точечного заряда и шара для доказательства совпадения формул напряженности; во втором случае из симметрии поля относительно плоскости выводится однородность поля, а формула напряженности поля дается без вывода. На основе этой формулы затем совершается переход к полю плоского конденсатора.

Упражнения

1. *Вычислите напряженность поля электрического диполя*, т. е. двух точечных зарядов, одинаковых по величине, но противоположных по знаку, расположенных на расстоянии l друг от друга ($\varepsilon=\text{const}$). а) в точке A_1, лежащей на продолжении оси диполя, на расстоянии r_1 от его центра $\left(r_1>\frac{l}{2}\right)$; б) в точке A_2, лежащей на перпендикуляре к оси диполя, восставленном из центра диполя, на расстоянии r_2 от него (рис. 3).

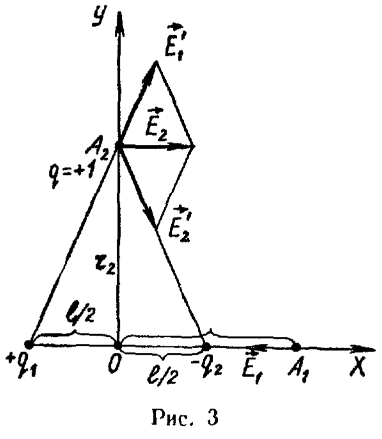

Рис. 3

При анализе решения задач ответьте на вопросы:

Каким видом симметрии характеризуется поле диполя?

Каково значение напряженности при $r_1=x=\pm\infty$, при $x=\pm\frac{l}{2}$?

Каково значение напряженности при $r_2=y=\pm\infty$, при $y=r_2=0$?

2. Найдите напряженность поля однородно заряженной проволоки длиной l, имеющей форму дуги окружности радиуса r в центре окружности при $\varepsilon=\text{const}$. Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 4. Исследуйте решения задачи при $2\alpha_0=\pi$ (полуокружность), при $2\alpha_0=2\pi$ (окружность).

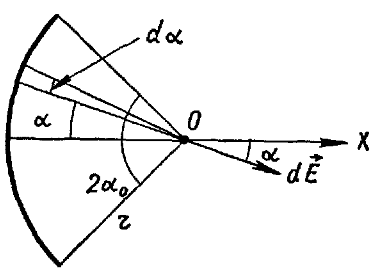

Рис. 4

3. Найдите напряженность поля однородно заряженного диска радиуса a в точке, лежащей на оси диска

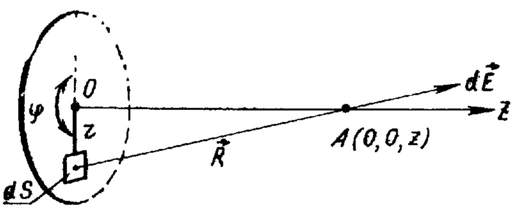

Рис. 5

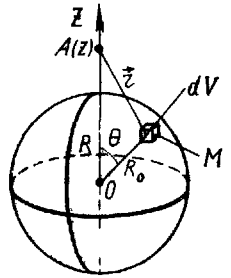

Рис 6

(ε = const). Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 5.

Ответьте на вопросы: Каким видом симметрии обладает поле?

Каково значение поля в центре диска, когда мы приближаемся к диску со стороны положительных значений z?

Каково значение поля в центре диска, когда мы приближаемся к диску со стороны отрицательных значений z?

Что характеризует напряженность поля при переходе через диск?

4. Найдите напряженность поля пространственно-однородно заряженного шара радиуса a при $\varepsilon = \text{const}$ во внешнем пространстве ($r \geqslant a$). Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 6. В силу сферической симметрии поля достаточно вычислить напряженность поля в точках, лежащих на одном радиусе, например на оси Z: $E = E_z$. Следует пользоваться сферическими координатами.

Сопоставьте полученное выражение с формулой для напряженности поля точечного заряда.

§ 4. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ПОЛЯ. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ $\vec{E}$

Векторное поле можно графически изобразить при помощи линий данного вектора. Это относится и к силовым линиям электрического поля. Силовой линией электрического поля называется такая линия, в каждой точке которой вектор $\vec{E}$ является касательной к ней. Условились приписывать силовым линиям направление, задаваемое в каждой точке направлением вектора $\vec{E}$; силовые линии начинаются на положительных и кончаются на отрицательных зарядах. Линии могут «приходить» из бесконечности, а также «уходить» в бесконечность. Как далее будет показано, в случае электростатического поля силовые линии никогда не бывают замкнутыми. Силовые линии результирующего поля нигде не пересекаются (в противном случае в точке их пересечения напряженность поля имела бы несколько значений, что лишено смысла).

В элементарных курсах физики и электротехники при помощи силовых линий изображают не только направление, но и числен-