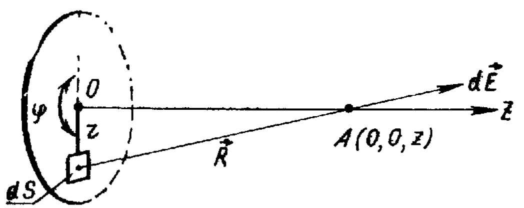

Рис. 5

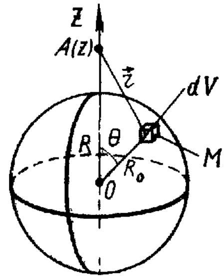

Рис 6

(ε = const). Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 5.

Ответьте на вопросы: Каким видом симметрии обладает поле?

Каково значение поля в центре диска, когда мы приближаемся к диску со стороны положительных значений z?

Каково значение поля в центре диска, когда мы приближаемся к диску со стороны отрицательных значений z?

Что характеризует напряженность поля при переходе через диск?

4. Найдите напряженность поля пространственно-однородно заряженного шара радиуса a при ε = const во внешнем пространстве ($r \geqslant a$). Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 6. В силу сферической симметрии поля достаточно вычислить напряженность поля в точках, лежащих на одном радиусе, например на оси Z: $E = E_z$. Следует пользоваться сферическими координатами.

Сопоставьте полученное выражение с формулой для напряженности поля точечного заряда.

§ 4. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ПОЛЯ. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ $\vec{E}$

Векторное поле можно графически изобразить при помощи линий данного вектора. Это относится и к силовым линиям электрического поля. Силовой линией электрического поля называется такая линия, в каждой точке которой вектор $\vec{E}$ является касательной к ней. Условились приписывать силовым линиям направление, задаваемое в каждой точке направлением вектора $\vec{E}$; силовые линии начинаются на положительных и кончаются на отрицательных зарядах. Линии могут «приходить» из бесконечности, а также «уходить» в бесконечность. Как далее будет показано, в случае электростатического поля силовые линии никогда не бывают замкнутыми. Силовые линии результирующего поля нигде не пересекаются (в противном случае в точке их пересечения напряженность поля имела бы несколько значений, что лишено смысла).

В элементарных курсах физики и электротехники при помощи силовых линий изображают не только направление, но и числен-

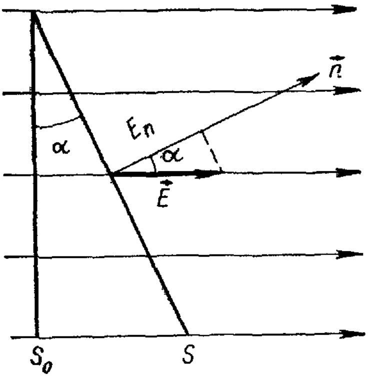

Рис. 7

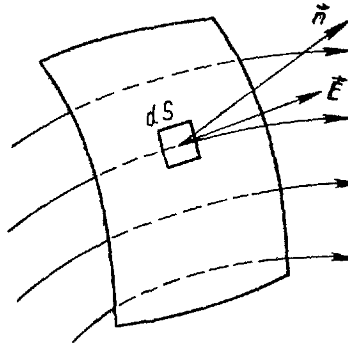

Рис 8

ное значение напряженности поля. Для этого условились проводить через единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям, столько линий, чтобы число их было пропорционально (или равно) значению напряженности поля в центре площадки.

Напомним вкратце понятие потока вектора на примере электростатического поля. В однородном поле ($\vec{E} = \text{const}$) поток N, пронизывающий установленную перпендикулярно вектору $\vec{E}$ площадку S_0, равен (рис. 7): $N = ES_0$. Поток N через другую площадку S, наклоненную относительно S_0 на угол $\alpha < (\widehat{\vec{E}, \vec{n}})$, где $\vec{n}$—внешняя нормаль к S, равен:

$$N = ES_0 = ES\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}).$$

Вводя выражение $E\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) = E_n$ для проекции вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$, можно поток для данного частного случая записать так:

$$N = E_nS. \tag{4.1}$$

В основе этой формулы лежит условие постоянства напряженности поля $\vec{E}$ на всей площадке S.

В курсе физики средней школы поток вектора напряженности $\vec{E}$ не вводится; при изложении явлений электромагнетизма вводится поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$, причем авторы ограничиваются выражением для потока вектора вида (4.1). Его ограниченная применимость очевидна: выражение (4.1) пригодно только в случае однородного поля и плоской площадки, а также в случае сферической поверхности и, соответственно, сферической симметрии поля (при совпадении их центров).

Выразим поток вектора $\vec{E}$ через любую поверхность. Пусть S представляет собой произвольную поверхность в поле вектора $\vec{E}$ (рис. 8). Выберем на поверхности элемент dS столь малый, чтобы его можно было считать плоским и принять напряженность во всех его точках постоянной. Тогда для элементарного потока dN через элемент поверхности dS применима формула (4.1)

$$dN = EdS\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) = E_n dS. \tag{4.2}$$

Полный поток вектора $\vec{E}$, пронизывающий поверхность S, находится интегрированием по всей поверхности:

$$N = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E}\,d\vec{S}; \tag{4.3}$$

в последний интеграл введена векторная площадь элемента поверхности $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$.

§ 5. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМАХ

На примере задач, предложенных в упражнениях к § 1—3, можно убедиться в том, что непосредственное использование закона Кулона и принципа суперпозиции полей даже в случае простой конфигурации заряженных тел приводит к громоздким вычислениям. В случаях симметричного распределения зарядов задача вычисления полей может быть существенно упрощена за счет применения электростатической теоремы Остроградского—Гаусса.

Пусть под малым телесным углом $d\omega$ (рис. 9) из его вершины O видны элемент сферической поверхности dS_0 и элемент несферической поверхности dS (будем их считать прямоугольными). Из-за малости dS_0 и dS считаем их плоскими и обозначим угол между ними через α. Проводим из точки O радиус-вектор $\vec{r}$ через середину площадки dS, а в точке пересечения проводим внешнюю нормаль $\vec{n}$; очевидно, $\angle\alpha = \angle(\widehat{\vec{r}, \vec{n}})$. Поскольку $dS_0 =$

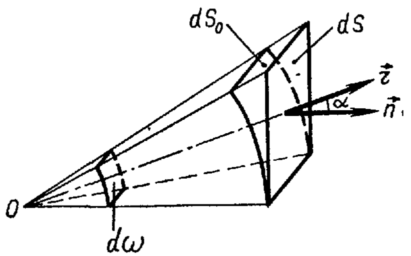

Рис 9.

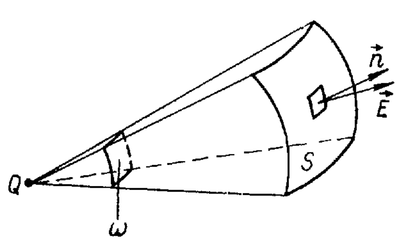

Рис. 10