Выразим поток вектора $\vec{E}$ через любую поверхность. Пусть S представляет собой произвольную поверхность в поле вектора $\vec{E}$ (рис. 8). Выберем на поверхности элемент dS столь малый, чтобы его можно было считать плоским и принять напряженность во всех его точках постоянной. Тогда для элементарного потока dN через элемент поверхности dS применима формула (4.1)

$$dN = EdS\cos(\widehat{\vec{E},\ \vec{n}}) = E_n dS. \tag{4.2}$$

Полный поток вектора $\vec{E}$, пронизывающий поверхность S, находится интегрированием по всей поверхности:

$$N = \int\limits_S E_n dS = \int\limits_S \vec{E}\, d\vec{S}; \tag{4.3}$$

в последний интеграл введена векторная площадь элемента поверхности $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$.

§ 5. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМАХ

На примере задач, предложенных в упражнениях к § 1—3, можно убедиться в том, что непосредственное использование закона Кулона и принципа суперпозиции полей даже в случае простой конфигурации заряженных тел приводит к громоздким вычислениям. В случаях симметричного распределения зарядов задача вычисления полей может быть существенно упрощена за счет применения электростатической теоремы Остроградского—Гаусса.

Пусть под малым телесным углом $d\omega$ (рис. 9) из его вершины O видны элемент сферической поверхности dS_0 и элемент несферической поверхности dS (будем их считать прямоугольными). Из-за малости dS_0 и dS считаем их плоскими и обозначим угол между ними через α. Проводим из точки O радиус-вектор $\vec{r}$ через середину площадки dS, а в точке пересечения проводим внешнюю нормаль $\vec{n}$; очевидно, $\angle\alpha = \angle(\widehat{\vec{r},\ \vec{n}})$. Поскольку $dS_0 =$

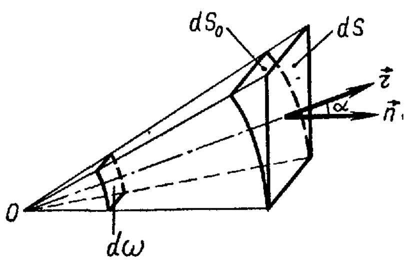

Рис 9.

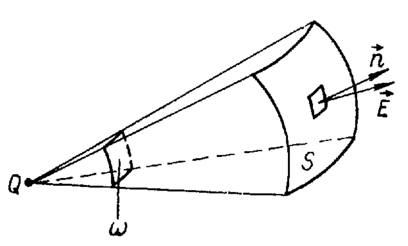

Рис. 10

$= dS\cos\alpha = dS\cos(\widehat{\vec{r},\ \vec{n}})$, имеем:

$$d\omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{dS\cos(\widehat{\vec{r},\ \vec{n}})}{r^2}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим поток вектора $\vec{E}$ от точечного заряда Q через произвольную незамкнутую поверхность S (рис. 10), видимую из точки истока под телесным углом ω. Подставляя в формулу (4.2) выражение для напряженности поля точечного заряда в скалярной форме (3.2), получим:

$$dN = \frac{QdS\cos(\widehat{\vec{E},\ \vec{n}})}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

что в силу соотношения (5.1) и очевидному совпадению направлений $\vec{E}$ и $\vec{r}$ приводит к зависимости элементарного потока от заряда Q и телесного угла $d\omega$:

$$dN = \frac{Qd\omega}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{5.2}$$

Интегрирование по всей поверхности дает полный поток:

$$N = \int \frac{Qd\omega}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\omega, \tag{5.3}$$

где ω — телесный угол, под которым видна поверхность S из точки, в которой находится «исток».

Если поверхность S целиком охватывает заряд Q, то телесный угол, под которым «видна» эта замкнутая поверхность, оказывается равным 4π; для потока через замкнутую поверхность имеем:

$$N = \oint_S \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}d\omega = \frac{4\pi Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{5.4}$$

Этот вывод может быть истолкован так: из заряда выходит $\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$ силовых линий (если заряд положителен) или к нему сходится столько же линий (если он отрицателен). Поток выходящих линий считается положительным, поток сходящихся линий — отрицательным. Если замкнутая поверхность охватывает несколько точечных зарядов, то поток через нее равен:

$$N = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\Sigma Q, \tag{5.5}$$

где ΣQ — алгебраическая сумма зарядов. Выражение (5.5) справедливо при любом (точечном, объемном или другом) распределении зарядов и представляет собой электростатическую теорему Остроградского — Гаусса в интегральной форме. В случае объем-

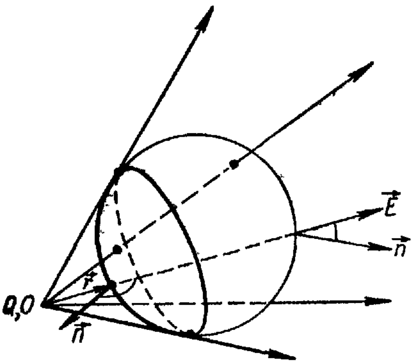

Рис. 11.

ного распределения зарядов формула (5.5) записывается так:

$$N = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int\limits_V \rho \, dV, \qquad (5.6)$$

где V — объем, охватываемый замкнутой поверхностью S.

Теорема формулируется так: поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен произведению множителя $\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}$ на алгебраическую сумму зарядов, охватываемых данной поверхностью.

Легко убедиться в том, что поток электрического вектора сквозь замкнутую поверхность, не охватывающую зарядов, равен нулю. Пусть в какой-нибудь внешней точке O (рис. 11) находится точечный заряд Q. Замкнутая поверхность видна из этой точки под телесным углом

$$\omega = \oint\limits_S \frac{dS \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}})}{r^2} = 0,$$

что объясняется разными знаками косинуса углов между $\vec{n}$ и $\vec{r}$ (или $\vec{E}$) на стороне поверхности S, обращенной к точке O (и на противоположной стороне). Это означает, что силовые линии столько же раз входят в рассматриваемый объем, сколько выходят из него.

Выразим теорему Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме. Пусть ΔV малый объем, охватываемый поверхностью ΔS и содержащий заряд $\Delta Q = \bar{\rho}\Delta V$, где $\bar{\rho}$ — средняя плотность заряда внутри ΔV. Запишем теорему Остроградского—Гаусса для этого объема:

$$\Delta N = \oint\limits_{\Delta S} E_n \, dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \bar{\rho} \Delta V. \qquad (5.7)$$

Разделим это выражение почленно на ΔV:

$$\frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{\oint\limits_{\Delta S} E_n \, dS}{\Delta V} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \bar{\rho}$$

и перейдем к пределу, стягивая ΔS в точку:

$$\frac{dN}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta S} E_n \, dS}{\Delta V} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho, \qquad (5.8)$$

где ρ — «истинная» макроскопическая плотность заряда в рассматриваемом физически бесконечно малом объеме (в «точке»). Но, по определению, выражение $\frac{dN}{dV}$ является дивергенцией (расходимостью) электрического вектора, которая представляет собой поток электрического вектора из единицы объема.

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{5.9}$$

(так записывается теорема Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме). В точках, где зарядов нет, это выражение приобретает вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Таким образом, силовые линии расходятся только из точек (или сходятся к точкам), где есть заряды.

С изложенной теоремой связана формула, которую называют также второй теоремой Остроградского—Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \oint_S E_n\, dS. \tag{5.10}$$

(Здесь S означает замкнутую поверхность, охватывающую объем V.) Эта формула позволяет преобразовывать объемный интеграл в интеграл по замкнутой поверхности (и наоборот), в связи с чем поток через замкнутую поверхность можно вычислять как интегрированием по объему, так и интегрированием по поверхности, охватывающей этот объем.

§ 6. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{D}$

Выше рассматривалось поле в неограниченном однородном диэлектрике. В качестве частного случая такого диэлектрика можно формально рассматривать вакуум, который характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. Если все поле заполнено однородным диэлектриком ($\varepsilon = \mathrm{const}$), то в знаменателе формул для вычисления напряженности и силовых взаимодействий появляется $\varepsilon > 1$, т. е. поле и силовые взаимодействия ослабевают в ε раз по сравнению с их значением в вакууме. В реальных условиях поле заполнено различными по форме и размерам диэлектриками. Учет искажения, которое они вносят в поле, представляет собой весьма сложную задачу.

В теории рассматриваются идеальные диэлектрики, заряды которых неразрывно связаны с молекулами (отсюда их название — «связанные» заряды); иначе говоря, исключаются из рассмотрения поля таких напряженностей, которые могли бы оторвать электроны от молекул. Принимается, что в молекуле связанные заряды