где ρ — «истинная» макроскопическая плотность заряда в рассматриваемом физически бесконечно малом объеме (в «точке»). Но, по определению, выражение $\frac{dN}{dV}$ является дивергенцией (расходимостью) электрического вектора, которая представляет собой поток электрического вектора из единицы объема.

Следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{5.9}$$

(так записывается теорема Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме). В точках, где зарядов нет, это выражение приобретает вид

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0.$$

Таким образом, силовые линии расходятся только из точек (или сходятся к точкам), где есть заряды.

С изложенной теоремой связана формула, которую называют также второй теоремой Остроградского- -Гаусса:

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV = \oint\limits_S E_n\,dS. \tag{5.10}$$

(Здесь S означает замкнутую поверхность, охватывающую объем V.) Эта формула позволяет преобразовывать объемный интеграл в интеграл по замкнутой поверхности (и наоборот), в связи с чем поток через замкнутую поверхность можно вычислять как интегрированием по объему, так и интегрированием по поверхности, охватывающей этот объем.

§ 6. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{D}$

Выше рассматривалось поле в неограниченном однородном диэлектрике. В качестве частного случая такого диэлектрика можно формально рассматривать вакуум, который характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. Если все поле заполнено однородным диэлектриком ($\varepsilon = \mathrm{const}$), то в знаменателе формул для вычисления напряженности и силовых взаимодействий появляется $\varepsilon > 1$, т. е. поле и силовые взаимодействия ослабевают в ε раз по сравнению с их значением в вакууме. В реальных условиях поле заполнено различными по форме и размерам диэлектриками. Учет искажения, которое они вносят в поле, представляет собой весьма сложную задачу.

В теории рассматриваются идеальные диэлектрики, заряды которых неразрывно связаны с молекулами (отсюда их название — «связанные» заряды); иначе говоря, исключаются из рассмотрения поля таких напряженностей, которые могли бы оторвать электроны от молекул. Принимается, что в молекуле связанные заряды могут несколько смещаться. Проводимость идеальных диэлектриков считается равной нулю.

При электризации (например, трением) диэлектрикам можно сообщить ограниченно «свободные» поверхностные заряды. В отличие от свободных зарядов на поверхности проводника, которые можно снять заземлением одной из точек поверхности, заряды, нанесенные на поверхность диэлектрика, можно отвести в землю только прикосновением ко всем точкам заряженной поверхности. У реальных диэлектриков имеется наряду с этим ограниченная проводимость. Внесение объемных свободных зарядов в твердый или жидкий диэлектрик макроскопических размеров практически неосуществимо, поэтому случаи однородных объемных зарядов, рассмотренные выше в ряде упражнений, наблюдаются лишь в газообразном и плазменном состояниях.

Под действием электрического поля происходит поляризация диэлектриков. В курсах общей физики рассматриваются два механизма поляризации: электронный и ориентационный. Первый механизм предполагает наличие неполярных молекул, в каждой из которых положительные и отрицательные заряды в отсутствии внешнего поля расположены симметрично относительно центра зарядов молекулы. Под действием внешнего поля происходит перераспределение зарядов внутри молекул—молекулы поляризуются (разноименные заряды в них смещаются в противоположных направлениях) и в первом приближении могут быть рассмотрены как электрические диполи («мягкие» диполи). Момент $\vec{p}$ молекулы-диполя равен произведению заряда одного знака q на расстояние l между центрами положительных и отрицательных зарядов. Вектор $\vec{l}$ направлен от центра отрицательных к центру положительных зарядов:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \tag{6.1}$$

Момент «мягкого» молекулярного диполя (называемого также индуцированным дипольным моментом) пропорционален напряженности поля:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}, \tag{6.2}$$

где β—поляризуемость молекулы; она характеризует степень податливости молекулы воздействию поля.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется вектором поляризации $\vec{P}$, который определяется как геометрическая сумма моментов молекулярных диполей в единице объема:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i, \tag{6.3}$$

где N—число молекулярных диполей в единице объема.

В однородном поле можно полагать все молекулы однородного вещества одинаково поляризованными, поэтому

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\varepsilon_0\beta\vec{E} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}, \qquad (6.4)$$

т. е. вектор поляризации прямо пропорционален напряженности поля. Коэффициент $\alpha = N\beta$ называется диэлектрической восприимчивостью вещества.

Примерами диэлектриков с неполярными молекулами могут служить: газы — H_2, N_2, CO_2, CH_4; жидкости — толуол, гексан, бензол; некоторые атомные и молекулярные кристаллы — нафталин, сера и др.

Второй (ориентационный) механизм поляризации характерен для диэлектриков, в молекулах которых заряды противоположного знака уже в отсутствии поля смещены друг относительно друга, т. е. молекулы имеют полярное строение и являются электрическими диполями («жесткими» диполями). Если внешнее поле отсутствует, то моменты молекулярных диполей ориентированы хаотично и вектор поляризации $\vec{P}$ равен нулю. Под воздействием внешнего электрического поля молекулярные диполи устанавливаются параллельно полю и $\vec{P} \neq 0$. Формула (6.3) справедлива, конечно, и в этом случае. В электронной теории доказывается (§ 57), что и при этом механизме поляризации вектор $\vec{P}$ пропорционален $\vec{E}$, т. е. $\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$.

Примеры диэлектриков с полярными молекулами: газы — H_2S, SO_2, NH_3; жидкости — вода, нитробензол, эфиры, органические кислоты; дипольные кристаллы — HCl, HBr и др. Наличие того или другого механизма поляризации обнаруживается по характеру температурной зависимости вектора поляризации: при электронном механизме такая зависимость практически отсутствует, при ориентационном механизме повышение температуры дезориентирует диполи и уменьшает поляризацию вещества.

Еще две группы диэлектриков — так называемые сегнетоэлектрики и анизотропные диэлектрики, поляризуемость которых неодинакова по различным направлениям, здесь не рассматриваются.

Из изложенного следует, что при отсутствии свободных зарядов диэлектрик представляет собой электрически нейтральную систему зарядов. Поляризация диэлектрика происходит под воздействием первичного поля, обусловленного распределением свободных зарядов (вне диэлектрика). Диэлектрик, оставаясь в целом нейтральным, создает дополнительное поле, обусловленное перераспределением в нем связанных зарядов. Внешнее поле и поле поляризованного диэлектрика образуют результирующее поле; оно и определяет окончательную поляризацию диэлектрика. Существование связанных зарядов в диэлектрике приводит к коренному отличию электрического поля в диэлектрике от поля в вакууме.

В макроскопической теории связанные заряды полагаются непрерывно распределенными по объему диэлектрика с объемной плотностью $\rho_{связ}$; вместе с тем на поверхности поляризованного диэлектрика появляются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{связ}$. Наряду со свободными зарядами и связанные заряды диэлектриков вносят свой вклад в электрическое поле зарядов.

Напряженность поля свободных зарядов $\vec{E}$ связана с объемной плотностью зарядов ρ соотношением

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где проницаемость ε учитывает влияние диэлектрической среды на величину поля. Вводя в соотношение (5.9) значение плотности связанных зарядов, можно использовать эту же формулу для непосредственного учета влияния диэлектрической среды. Если суммарная объемная плотность зарядов равна $\rho+\rho_{связ}$, то

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_{связ}), \tag{6.5}$$

т. е. электрическое поле обусловлено как свободными, так и связанными зарядами. Соответственно изменяется и интегральная запись формул; например, выражение (3.11) для вычисления напряженности при объемном распределении зарядов записывается в виде

$$\vec{E}=\int\limits_V\frac{(\rho+\rho_{связ})\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}dV. \tag{6.6}$$

Решение задач электростатики по вычислению напряженности поля в диэлектрической среде значительно облегчается, если ввести в рассмотрение вспомогательную величину — вектор электрической индукции $\vec{D}$, который также является характеристикой поля в каждой точке, но отличается от электрического вектора тем, что источниками вектора индукции являются только свободные электрические заряды. Дифференциальное уравнение Остроградского—Гаусса для вектора $\vec{D}$ входит в систему уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла):

$$\operatorname{div}\vec{D}=\rho, \tag{6.7}$$

которое для точек, где нет свободных зарядов, принимает вид

$$\operatorname{div}\vec{D}=0.$$

Поле вектора $\vec{D}$ графически изображается при помощи линий этого вектора — линий индукции, которые начинаются на положительных и кончаются на отрицательных свободных зарядах. Широко применяются понятия потока индукции $N_D = \int\limits_S D_n\,dS$ и теорема Остроградского—Гаусса в интегральной форме:

$$N_D = \oint\limits_S D_n\,dS = \int\limits_V \rho\,dV = \Sigma Q, \quad (6.8)$$

где ΣQ—алгебраическая сумма свободных зарядов в объеме V, охватываемом поверхиостью S.

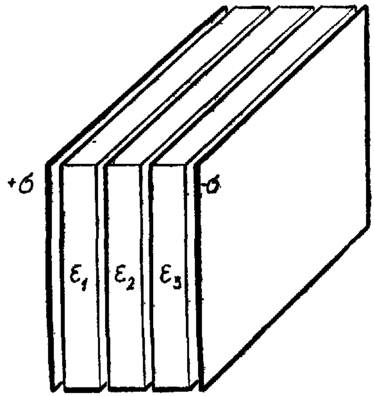

Рис. 12

Связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ вытекает из сопоставления уравнений Остроградского — Гаусса для этих векторов (5.9) и (6.7): $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$, $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$.

В однородном диэлектрике ($\varepsilon = \mathrm{const}$) первую запись можно представить так: $\operatorname{div}\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \rho$, откуда получаем искомую связь:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \quad (6.9)$$

В СИ электрическая постоянная ε_0 измеряется в $\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$, электрическая индукция $\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, т. е. эта единица совпадает с единицей поверхностной плотности заряда. Примером применения понятия вектора индукции при исследовании электростатических полей может служить вычисление поля в слоистом диэлектрике плоского конденсатора (см. упр. 8). На рисунке 12 изображен слоистый диэлектрик, для которого полагаем $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 1$. Вектор индукции поля плоского конденсатора: $D = \sigma$, причем это выражение справедливо во всех слоях. Отсюда получаем для соответствующих напряженностей: $E_1 = \frac{D}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = \frac{D}{4\varepsilon_0}$, $E_3 = \frac{D}{\varepsilon_0}$. (Строгое обоснование непрерывности линий электрической индукции на граиице двух диэлектриков будет дано в § 17.)

Упражнения

5. Найдите напряженность поля поверхностно заряженного проводящего шара радиуса a вне шара и внутри его при $\sigma = \mathrm{const}$ и $\varepsilon = \mathrm{const}$, пользуясь теоремой Остроградского — Гаусса в интегральной форме (рис. 13).

При исследовании решения сопоставьте формулу напряженности точечного заряда с формулами напряженности объемно заряженного шара (упр. 4) и поверхностно заряженного шара во внешнем пространстве.

Постройте график $E = f(r)$ для поля поверхностно заряженного шара.

Определите величину напряженности в точке поля у поверхности шара.

Установите величину скачка напряженности при переходе через границу диэлектрик — проводник.

6. Найдите напряженность поля бесконечно длинного прямого кругового проводящего цилиндра радиуса a при $\sigma = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$ (рис. 14).

При исследовании решения ответьте на вопросы:

Какой смысл имеет условие, что цилиндр бесконечно длинный?

При каких условиях решение, полученное для поля бесконечно длинного цилиндра в наружном пространстве, применимо и для поля цилиндров конечной длины?

На рисунке 14 изображен пояс единичной высоты, заряд которого $k = 2\pi a\sigma$. Выразите поле в наружной точке через k.

Если мысленно сжать цилиндр, он превращается в заряженную линию. Какова формула напряженности однородно заряженной линии?

Определите поле на поверхности цилиндра и сопоставьте полученное выражение с соответствующим выражением для поля на поверхности шара.

Постройте график $E = f(r)$.

Какой вид симметрии наблюдается у поля?

7. Найдите напряженность поля заряженной бесконечной плоскости (рис. 15) при $\sigma = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$.

Какой смысл имеет условие, что плоскость бесконечна?

При каких условиях решение, полученное для поля бесконечной

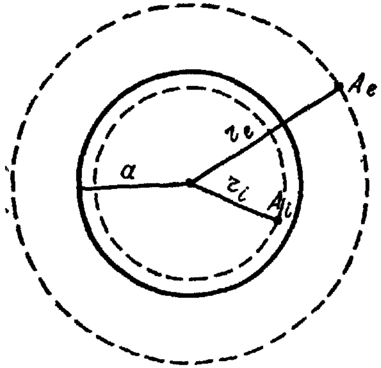

Рис. 13

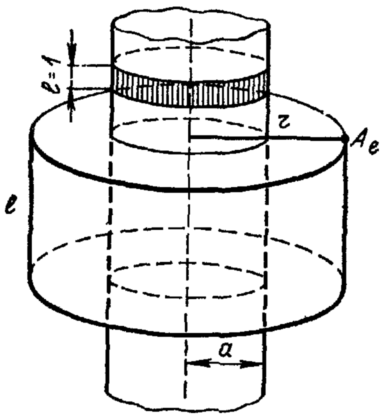

Рис. 14

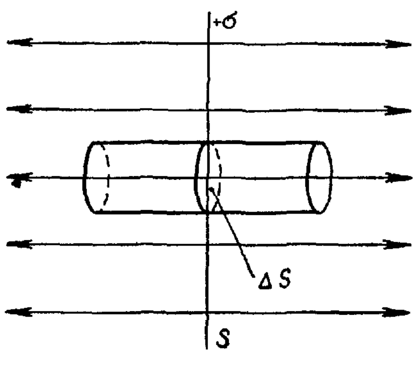

Рис. 15

плоскости, применимо и для поля плоскости конечных размеров?

Установите скачок напряженности при переходе через плоскость.

8. Найдите напряженность поля двух разноименно заряженных пластин (поле плоского конденсатора, рис. 16).

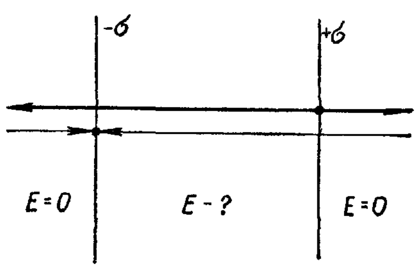

Рис. 16

При каком условии полученное решение применимо к полю плоского конденсатора конечных размеров?

Вспомните конфигурацию линий поля у краев.

9. Найдите напряженность поля бесконечной объемно заряженной пластинки толщиной h при $\rho = \mathrm{const}$ и $\varepsilon = \mathrm{const}$ (рис. 17), пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме.

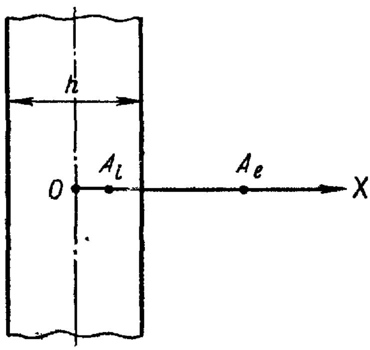

Рис. 17

Рекомендуется построить график $E = f(x)$.

Указание. При решении дифференциальных уравнений для E_e и E_i появляются постоянные интегрирования, для определения которых нужно использовать свойства напряженности в однородной среде при объемном распределении зарядов (§ 3): напряженность всюду конечна, непрерывна и в бесконечности равна нулю.

10. Найдите напряженность поля однородно заряженного сферического слоя с радиусами a и b, пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме (рис. 18).

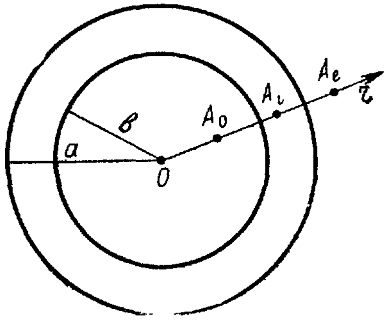

Рис. 18

Указание. Напряженность поля надо вычислить в точках внешнего пространства, внутри слоя и в полости.

11. Найдите напряженность поля объемно заряженного шара радиуса a, пользуясь выражением для дивергенции $\vec{D}$ (при $\rho = \mathrm{const}$), записанным в сферических координатах. Принять, что относительные диэлектрические проницаемости шара и неограниченной окружающей среды соответственно равны ε_1 и ε_2.

При анализе решения найдите отношение $\frac{E_2}{E_1}$ на поверхности шара, Изобразите графически ход напряженности $E = f(r)$ при условии $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$.

12. Найдите напряженность поля объемно заряженного бесконечно длинного цилиндра радиуса a, используя уравнение $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ (при $\rho = \text{const}$). Принять относительные проницаемости цилиндра и окружающей среды равными ε_1 и ε_2.

§ 7. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электрическое поле обладает энергией, за счет которой оно может производить работу перемещения заряженных частиц и тел. Вычислим работу поля точечного заряда Q по элементарному перемещению $d\vec{l}$ заряда q (рис. 19):

$$dA = \vec{f}\, d\vec{l} = q\vec{E}\, d\vec{l}, \tag{7.1}$$

где $\vec{f} = q\vec{E}$ — сила, действующая на заряд q, а $\vec{E}$ — напряженность поля в точке, совпадающей с концом радиус-вектора $\vec{r}$, соединяющего заряды Q и q (3.2).

С учетом (3.2)

$$dA = q\vec{E}\, d\vec{l} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\, dr. \tag{7.2}$$

Здесь мы использовали равенство $r\, dl \cos(\widehat{\vec{r}, d\vec{l}}) = r\, dr$, где dr — элемент силовой линии.

Работу поля по перемещению заряда q (при $\varepsilon = \text{const}$) на конечном участке пути между точками *1* и *2*, отстоящими от заряда на расстояния r_1 и r_2, получаем интегрированием:

$$A = q\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{7.3}$$

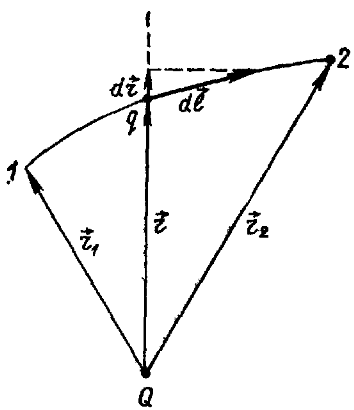

Рис. 19

Из соотношения (7.3) видно, что работа электростатического поля точечного заряда не зависит от формы пути заряда, а определяется положением начальной и конечной точек пути. Легко показать, что этот вывод распространяется и на работу электростатического поля системы точечных, объемных или поверхностных зарядов. Силовые поля, характеризующиеся таким свойством, называют потенциальными или безвихревыми.

Очевидно, линейный интеграл $\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} = \int_1^2 E_l\, dl$ выражает работу,