Изобразите графически ход напряженности $E=f(r)$ при условии $\varepsilon_1=2\varepsilon_2$.

12. Найдите напряженность поля объемно заряженного бесконечно длинного цилиндра радиуса a, используя уравнение $\operatorname{div}\vec{D}=\rho$ (при $\rho=\text{const}$). Принять относительные проницаемости цилиндра и окружающей среды равными ε_1 и ε_2.

§ 7. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электрическое поле обладает энергией, за счет которой оно может производить работу перемещения заряженных частиц и тел. Вычислим работу поля точечного заряда Q по элементарному перемещению $d\vec{l}$ заряда q (рис. 19):

$$dA=\vec{f}\,d\vec{l}=q\vec{E}\,d\vec{l}, \tag{7.1}$$

где $\vec{f}=q\vec{E}$ — сила, действующая на заряд q, а $\vec{E}$ — напряженность поля в точке, совпадающей с концом радиус-вектора $\vec{r}$, соединяющего заряды Q и q (3.2).

С учетом (3.2)

$$dA=q\vec{E}\,d\vec{l}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,dr. \tag{7.2}$$

Здесь мы использовали равенство $r\,dl\cos(\widehat{\vec{r},\,d\vec{l}})=r\,dr$, где dr — элемент силовой линии.

Работу поля по перемещению заряда q (при $\varepsilon=\text{const}$) на конечном участке пути между точками *1* и *2*, отстоящими от заряда на расстояния r_1 и r_2, получаем интегрированием:

$$A=q\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\,d\vec{l}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \tag{7.3}$$

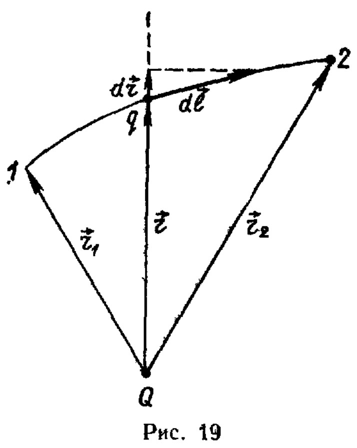

Рис. 19

Из соотношения (7.3) видно, что работа электростатического поля точечного заряда не зависит от формы пути заряда, а определяется положением начальной и конечной точек пути. Легко показать, что этот вывод распространяется и на работу электростатического поля системы точечных, объемных или поверхностных зарядов. Силовые поля, характеризующиеся таким свойством, называют потенциальными или безвихревыми.

Очевидно, линейный интеграл $\int_1^2\vec{E}\,d\vec{l}=\int_1^2 E_l\,dl$ выражает работу, которую совершает (или может выполнить) электростатическое поле при перемещении единичного заряда $q=1$ из точки *1* в точку *2*. Естественно, что линейный интеграл $\int\limits_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}$ также не зависит от формы пути интегрирования. Соответственно, в электростатическом поле соблюдается равенство интегралов (рис. 20)

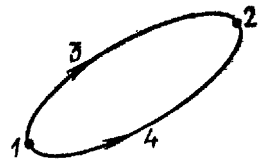

Рис. 20

$$\int\limits_{132} \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{142} \vec{E}\,d\vec{l}.$$

Составим криволинейный интеграл по замкнутому пути *13241*, изменив направление перемещения на отрезке *142*, указанное на рисунке 20, на противоположное:

$$\int\limits_{132} \vec{E}\,d\vec{l} = -\int\limits_{142} \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{241} \vec{E}\,d\vec{l},$$

откуда

$$\int\limits_{132} \vec{E}\,d\vec{l} + \int\limits_{241} \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{13241} \vec{E}\,d\vec{l} = \oint\limits_{L} \vec{E}\,d\vec{l} = 0. \qquad (7.4)$$

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру, называемый циркуляцией вектора $\vec{E}$ и имеющий физический смысл работы перемещения единичного заряда по замкнутому пути, в электростатическом поле равен нулю. Поля, подобные электростатическому, в которых циркуляция вектора поля по любому контуру равна нулю, называются потенциальными или безвихревыми. Оба данных в этом параграфе определения потенциальности поля эквивалентны, они являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности поля.

Из равенства (7.4) сразу же вытекает, что в электростатическом поле нет замкнутых силовых линий: наличие замкнутых силовых линий означает, что $\oint \vec{E}\,d\vec{l} \neq 0$ (это противоречит потенциальному характеру электростатического поля).

Другим примером потенциального поля является гравитационное поле.

Можно условие потенциальности поля записать иначе, используя известную из векторного анализа теорему Стокса, согласно которой циркуляция вектора по произвольному замкнутому контуру L равна потоку ротора этого вектора через произвольную поверхность S, ограничиваемую этим контуром:

$$\oint\limits_{L} \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{S} \operatorname{rot}_n \vec{E}\,dS, \qquad (7.5)$$

где направление нормали к контуру определяется направлением обхода по контуру (правилом правого винта). Потенциальность поля означает равенство нулю каждого из интегралов (7.5) для любого контура, проведенного в поле, что возможно лишь при условии:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \qquad (7.6)$$

Равенство (7.6) также является необходимым и достаточным условием потенциальности поля.

§ 8. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Работа электростатического поля может быть также определена через изменение энергетической величины, характеризующей поле в каждой его точке,— скалярного электрического потенциала.

Пусть в поле положительного заряда Q помещен пробный (по условию тоже положительный) заряд q. Если у пробного заряда нет каких-либо механических связей, т. е. если он свободен, то под действием электростатических сил отталкивания он будет удаляться от заряда Q в сторону уменьшающихся значений напряженности до тех пор, пока поле не станет равным нулю; принято говорить, что заряд выталкивается в бесконечность. Поле при этом совершает работу A_∞, которая идет на увеличение кинетической энергии пробного заряда. Во всех практически важных случаях указанная работа имеет конечное значение и пропорциональна величине пробного заряда.

По определению, потенциалом φ поля в точке, из которой началось перемещение пробного заряда, называется отношение

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}. \qquad (8.1)$$

Если заряд Q отрицателен, то, очевидно, работа сил поля при удалении пробного заряда, а следовательно, и потенциал имеют отрицательные знаки.

Таким образом, потенциал поля в данной точке численно равен работе, совершаемой полем при выталкивании единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность. Равноценно и другое определение: потенциал поля в данной точке численно равен работе внешних сил против поля при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в эту точку. Очевидно, что работа внешних сил при перемещении заряда из бесконечности в данную точку поля переходит в его потенциальную энергию, т. е.— $A_\infty = W$. Следовательно,

$$\varphi = \frac{W}{q}. \qquad (8.2)$$

Отсюда вытекает, что потенциал поля в данной точке численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.