§ 10. ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛА И ЕГО СВЯЗЬ С НАПРЯЖЕННОСТЬЮ ПОЛЯ

Градиент потенциала представляет собой вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины. Напомним его свойства.

Работа электростатического поля при перемещении единичного положительного заряда из произвольной точки пространства $A_1(x, y, z)$ в бесконечно близкую точку $A_2(x+dx;\ y+dy;\ z+dz)$ численно равна разности потенциалов этих точек:

$$\varphi(A_1)-\varphi(A_2)=-[\varphi(A_2)-\varphi(A_1)]=\vec{E}\,\vec{dl},$$

где $\vec{dl}$—радиус-вектор, проведенный из точки A_1 в точку A_2. Таким образом,

$$\vec{E}\,\vec{dl}=-d\varphi, \tag{10.1}$$

где $d\varphi$—полный дифференциал функции $\varphi(x, y, z)$, что вытекает из сформулированных выше свойств разности потенциалов. Знак «—» означает, что поле перемещает положительный заряд в сторону убывания потенциала. Переписываем уравнение (10.1):

$$\vec{E}\,\vec{dl}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)=-\mathrm{grad}\,\varphi\,\vec{dl}, \tag{10.2}$$

где $\mathrm{grad}\,\varphi=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Отсюда

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi, \tag{10.3}$$

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

и

$$|\vec{E}|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Оба вектора ($\vec{E}$ и $\mathrm{grad}\,\varphi$) в каждой точке электростатического поля численно равны и противоположны по направлению. Оба вектора являются касательными к силовым линиям и выражаются в одинаковых единицах.

Связь между градиентом потенциала и напряженностью поля имеет первостепенное значение в теории поля. Из сопоставления формул для напряженности и потенциала видно, что вычисление потенциала выполняется проще, поэтому в теории и в ее практических приложениях весьма часто напряженность поля находят следующим образом. Сначала находят потенциал. Если же известен потенциал поля как функция декартовых координат, то составляющие напряженности по осям x, y, z можно вычислить как взятые с обратным знаком частные производные

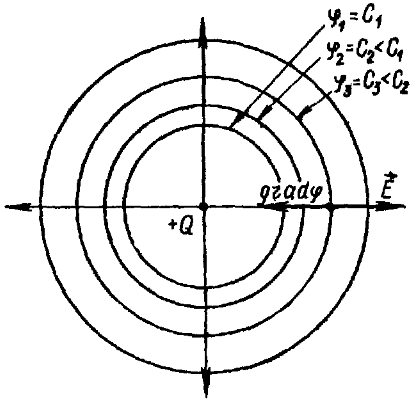

Рис. 21

потенциала по декартовым координатам. Это справедливо при любом распределении зарядов.

Естественно, что связь градиента с напряженностью может быть использована и для вычисления потенциала, если известна напряженность.

Описание поля при помощи потенциала обладает еще одним преимуществом: разность потенциалов двух точек поля легче измерить на опыте, чем напряженность поля. Для непосредственного измерения напряженности электрического поля не имеется удобных методов; между тем для измерения разности потенциалов существуют многочисленные методы и разнообразные приборы. В силу этого экспериментальные методы определения напряженности сводятся, как правило, к предварительному измерению разности потенциалов.

Обращаем внимание на то важное обстоятельство, что связь между $\vec{E}$ и φ соответствует общему виду связи между силой и потенциальной энергией.

Из определения градиента и выражения (10.3) вытекает, что силовые линии поля перпендикулярны поверхностям $\varphi = \text{const}$, которые называют эквипотенциальными поверхностями. В поле точечного заряда и однородно заряженного шара эквипотенциальные поверхности представляют собой семейство концентрических сфер (рис. 21).

Встречающиеся в школьном курсе формулы $E\,\Delta l = -\Delta\varphi$, $E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ справедливы, очевидно, либо при переходе к пределу (бесконечно малому перемещению $\Delta\vec{l}$), либо в случае однородных полей и перемещению вдоль силовой линии.

Упражнения

13. Найдите потенциал поля однородно заряженного шара в точке, внешней по отношению к нему (исходите из известной формулы для напряженности поля заряженного шара).

Сопоставьте полученную формулу с формулой для потенциала поля точечного заряда.

14. Найдите потенциал электрического поля бесконечно длинного однородно заряженного цилиндра радиуса a во внешней точке при постоян-

сгве k (заряда единицы длины). Исходите из полученной в упражнении 6 формулы для напряженности поля заряженного цилиндра: $E=\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$.

При исследовании решения обратите внимание на то обстоятельство, что потенциал бесконечности не равен нулю Поэтому надо принять за начальный уровень какую-либо эквипотенциальную поверхность, например поверхность цилиндра.

Какие слагаемые, появляющиеся в решении, являются постоянными?

На каком основании оперируют формулой $\varphi=\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}$ в качестве формулы для вычисления потенциала поля цилиндра (логарифмический потенциал)?

Применимо ли это выражение для определения потенциала однородно заряженной линии?

15. Проверьте, пользуясь условием потенциальности $\operatorname{rot}\vec{E}=0$, является ли поле потенциальным, если составляющие его напряженности по осям сферической системы координат выражаются следующим образом: $E_r=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$, $E_\theta=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$, $E_\varphi=0$ ($p=\mathrm{const}$, $\varepsilon=\mathrm{const}$)

Указание. Надо проверить равенство нулю каждой составляющей ротора.

§ 11. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

В § 6 уже было введено понятие электрического диполя — системы двух точечных зарядов, одинаковых по величине, но противоположных по знаку, расположенных на малом расстоянии друг от друга. По аналогии в теории магнитных явлений рассматривается магнитный диполь. Важность рассматриваемой модели обусловлена тем, что молекулы во многих случаях можно рассматривать как диполи.

Основной характеристикой диполя является дипольный момент $\vec{p}$, который численно равен произведению заряда q на расстояние l, между зарядами и направлен по вектору $\vec{l}$ (имеющему направление от отрицательного заряда к положительному):

$$\vec{p}=q\vec{l}. \tag{11.1}$$

Значением электрического момента определяются как собственное поле диполя, так и силы, действующие на диполь во внешнем поле. На заряды диполя $+q$ и $-q$ (рис. 22, *а*) в однородном электрическом поле действуют равные и противоположно направленные силы $|\vec{f}_1|=|\vec{f}_2|=|q\vec{E}|$, образующие пару сил. Вращающий момент $\vec{K}$ этой пары равен:

$$K=fl\sin\theta=qEl\sin\theta=pE\sin(\widehat{\vec{p},\vec{E}}).$$

В векторной форме

$$\vec{K}=[\vec{p}\vec{E}]. \tag{11.2}$$