стве k (заряда единицы длины). Исходите из полученной в упражнении 6 формулы для напряженности поля заряженного цилиндра: $E = \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$.

При исследовании решения обратите внимание на то обстоятельство, что потенциал бесконечности не равен нулю Поэтому надо принять за начальный уровень какую-либо эквипотенциальную поверхность, например поверхность цилиндра.

Какие слагаемые, появляющиеся в решении, являются постоянными?

На каком основании оперируют формулой $\varphi = \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r}$ в качестве формулы для вычисления потенциала поля цилиндра (логарифмический потенциал)?

Применимо ли это выражение для определения потенциала однородно заряженной линии?

15. *Проверьте, пользуясь условием потенциальности* $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, является ли поле потенциальным, если составляющие его напряженности по осям сферической системы координат выражаются следующим образом: $E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$, $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$, $E_\varphi = 0$ ($p = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$)

Указание. Надо проверить равенство нулю каждой составляющей ротора.

§ 11. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

В § 6 уже было введено понятие электрического диполя — системы двух точечных зарядов, одинаковых по величине, но противоположных по знаку, расположенных на малом расстоянии друг от друга. По аналогии в теории магнитных явлений рассматривается магнитный диполь. Важность рассматриваемой модели обусловлена тем, что молекулы во многих случаях можно рассматривать как диполи.

Основной характеристикой диполя является дипольный момент $\vec{p}$, который численно равен произведению заряда q на расстояние l, между зарядами и направлен по вектору $\vec{l}$ (имеющему направление от отрицательного заряда к положительному):

$$\vec{p} = q\vec{l}. \tag{11.1}$$

Значением электрического момента определяются как собственное поле диполя, так и силы, действующие на диполь во внешнем поле. На заряды диполя $+q$ и $-q$ (рис. 22, *а*) в однородном электрическом поле действуют равные и противоположно направленные силы $|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = |q\vec{E}|$, образующие пару сил. Вращающий момент $\vec{K}$ этой пары равен:

$$K = fl \sin\theta = qEl \sin\theta = pE \sin(\widehat{\vec{p}, \vec{E}}).$$

В векторной форме

$$\vec{K} = [\vec{p}\vec{E}]. \tag{11.2}$$

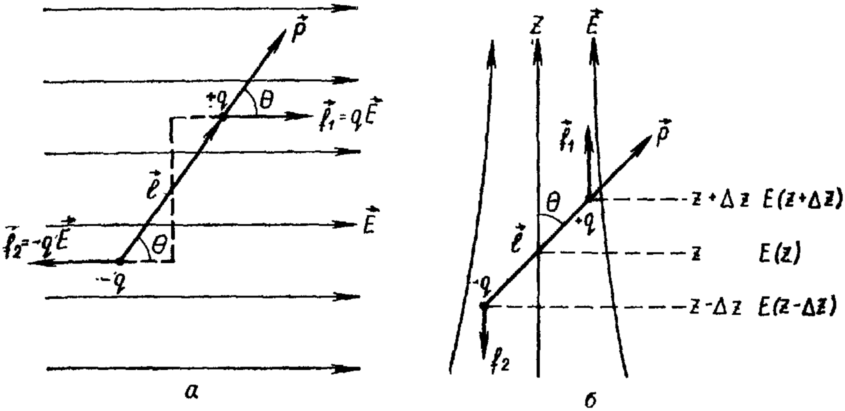

Рис. 22

В неоднородном электрическом поле на диполь наряду с вращающим моментом действует еще равнодействующая двух неодинаковых по величине сил поля, приложенных к концам (полюсам) диполя. Неоднородность поля можно характеризовать производной от модуля напряженности по координате. Пусть (рис. 22, *б*) поле усиливается наиболее быстро в направлении оси Z; $\frac{\partial E}{\partial z}$ означает приращение модуля напряженности в направлении Z на единицу длины (градиент модуля напряженности).

Введем обозначения для z-х координат центра и полюсов диполя: z, $z+\Delta z$, $z-\Delta z$; напряженность внешнего поля в этих точках обозначим $E(z)$; $E(z+\Delta z)$; $E(z-\Delta z)$. Если диполь короткий (l мало), то напряженность внешнего поля в точках, где расположены заряды, можно записать так:

$$E(z+\Delta z) = E(z) + \frac{\partial E}{\partial z}\Delta z,$$

$$E(z-\Delta z) = E(z) - \frac{\partial E}{\partial z}\Delta z.$$

Искомая равнодействующая сил определяется выражением

$$f = f_1 - f_2 = qE(z+\Delta z) - qE(z-\Delta z) = q\frac{\partial E}{\partial z}2\Delta z.$$

С учетом очевидного равенства $2\Delta z = l\cos\theta$ равнодействующая сила может быть записана в виде

$$f = ql\frac{\partial E}{\partial z}\cos\theta = p\frac{\partial E}{\partial z}\cos\theta. \qquad (11.3)$$

Направление этой силы зависит от знака $\cos\theta$, а следовательно, от величины угла θ: при $\theta < \frac{\pi}{2}$ равнодействующая сила направлена по полю, и диполь втягивается в направлении возрастания поля; при $\theta > \frac{\pi}{2}$ диполь выталкивается в область меньших значений $\vec{E}$. Последнее явление обычно не наблюдается, так как вследствие одновременного действия вращающего момента диполь ориентируется вдоль вектора напряженности ($\theta = 0$, $\cos\theta = 1$).

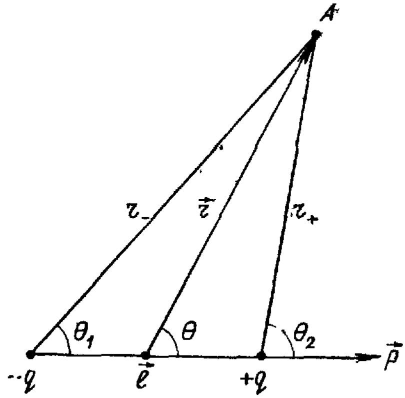

Рис. 23

Найдем напряженность поля, создаваемого диполем, пользуясь при этом способом, указанным в § 10. Предварительно вычислим потенциал исследуемого поля и вслед за тем по известному потенциалу определим напряженность. Рисунок 23 поясняет вводимые обозначения: здесь r_+, r_-, r — расстояния до точки наблюдения от зарядов и от середины диполя. Потенциал результирующего поля в точке A можно рассматривать как алгебраическую сумму потенциалов, создаваемых в этой точке зарядами $+q$ и $-q$ в отдельности:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right). \qquad (11.4)$$

Ограничимся частным случаем, когда $r \gg l$ (при исследовании поля молекулярных диполей это условие обычно выполняется); в этом случае можно положить: $r_+ \cdot r_- \approx r^2$, $r_- - r_+ = l\cos\theta$, пренебрегая различием в величине углов θ_1, θ_2 и θ.

Подставив эти выражения в (11.4), находим потенциал поля диполя:

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \qquad (11.5)$$

Умножая числитель и знаменатель на r, можно представить это выражение в векторной форме:

$$\varphi = \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}.$$

Наконец, учитывая равенство $\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right) = -\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}$, перепишем последнее выражение:

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{grad}_a\frac{1}{r}. \qquad (11.6)$$

Убедимся в правильности примененного векторного равенства.

Дифференцированием можно проверить, что численное значение градиента по координатам точки истока q равно:

$$\left|\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)\right|=\frac{1}{r^2},$$

т. е. $\left|\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)\right|=\sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2}.$

Выполним дифференцирование:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right)=\frac{x-x_0}{r^3}.$$

Складывая квадраты частных производных $\left[\frac{x-x_0}{r^3}\right]^2$, $\left[\frac{y-y_0}{r^3}\right]^2$, $\left[\frac{z-z_0}{r^3}\right]$, получим искомое выражение.

Вектор $\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)$ по направлению совпадает с вектором $\vec{r}$; дифференцирование по координатам точки истока означает, что конец вектора (точка наблюдения) неподвижен, а точка истока перемещается. Очевидно, что скалярная величина $\frac{1}{r}$ наиболее быстро возрастает в том случае, если r наиболее быстро убывает. Это имеет место при перемещении вдоль $\vec{r}$. Следовательно,

$$\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)=\left|\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)\right|\frac{\vec{r}}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{11.7}$$

Аналогично находим градиент по координатам точки наблюдения: $\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Дифференцирование по координатам точки наблюдения означает, что начало вектора градиента (точка истока) неподвижно, а точка наблюдения перемещается. Скалярная величина $\frac{1}{r}$ в данном случае наиболее быстро возрастает, если перемещение происходит в направлении, противоположном $\vec{r}$ (и r убывает).

Мы получили выражение для потенциала (11.5) как функцию координат r, θ. По сути дела, мы неявно ввели сферические координаты, поместив начало координат в середину диполя и направив полярную ось вдоль $\vec{p}$ (рис. 23). От азимутального угла потенциал поля φ не зависит, так как поле диполя обладает осевой симметрией; осью симметрии является ось диполя.

Определим составляющие напряженности:

$$E_r=-\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3};$$

$$E_\theta=-\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}; \tag{11.8}$$

$$E_\psi=-\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)=0.$$

Здесь ψ — азимутальная координата; h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламэ в сферической системе координат. Отсюда находим модуль напряженности:

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2+E_\psi^2}=\sqrt{\frac{4p^2\cos^2\theta+p^2\sin^2\theta}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3)^2}}=$$
$$=\frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}. \qquad (11.9)$$

Вектор напряженности образует с направлением $\vec{r}$ угол β, для которого из соотношения (11.8) имеем:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{E_\theta}{E_r}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

Иногда рассматриваются два частных случая (так называемые гауссовы положения): поле в точках, лежащих на продолжении оси диполя, и в точках, лежащих на перпендикуляре, восставленном из середины диполя, т. е. в точках экваториальной плоскости. В первом случае (при $\theta=0$, π) $E_1=\frac{p}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$; во втором случае $\left(\text{при } \theta=\frac{\pi}{2}\right)$ $E_2=\frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$.

§ 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ТЕЛА

Используем результаты предыдущих параграфов (понятие потенциала, поле диполя), чтобы исследовать явление поляризации диэлектриков, исходя из атомно-молекулярных процессов, лежащих в основе поляризации. Как уже указывалось в § 6, поляризация диэлектриков происходит под действием первичного поля, потенциал которого (в фиксированной точке наблюдения) обозначим через φ_0. Поляризованное тело, оставаясь в целом нейтральным, создает дополнительное электрическое поле, обладающее в точке наблюдения потенциалом φ'. Это поле, накладываясь на первичное поле, приводит к тому, что в диэлектрике и в окружающем его пространстве возникает результирующее поле, обладающее в точке наблюдения потенциалом φ; окончательная поляризация тела обусловлена именно этим результирующим полем.

Потенциал результирующего поля

$$\varphi=\varphi_0+\varphi', \qquad (12.1)$$

соответственно

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'. \qquad (12.2)$$

Поскольку поляризованный диэлектрик можно рассматривать как совокупность молекулярных диполей, то потенциал его поля может быть определен как алгебраическая сумма потенциалов $\Sigma\varphi_{\text{дип}}$, создаваемых в точке наблюдения отдельными диполями.