Здесь ψ — азимутальная координата; h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламэ в сферической системе координат. Отсюда находим модуль напряженности:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2 + E_\psi^2} = \sqrt{\frac{4p^2 \cos^2\theta + p^2 \sin^2\theta}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3)^2}} = \\ = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \qquad (11.9)$$

Вектор напряженности образует с направлением $\vec{r}$ угол β, для которого из соотношения (11.8) имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

Иногда рассматриваются два частных случая (так называемые гауссовы положения): поле в точках, лежащих на продолжении оси диполя, и в точках, лежащих на перпендикуляре, восставленном из середины диполя, т. е. в точках экваториальной плоскости. В первом случае (при $\theta = 0$, π) $E_1 = \frac{p}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$; во втором случае $\left(\text{при } \theta = \frac{\pi}{2}\right)$ $E_2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$.

§ 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ТЕЛА

Используем результаты предыдущих параграфов (понятие потенциала, поле диполя), чтобы исследовать явление поляризации диэлектриков, исходя из атомно-молекулярных процессов, лежащих в основе поляризации. Как уже указывалось в § 6, поляризация диэлектриков происходит под действием первичного поля, потенциал которого (в фиксированной точке наблюдения) обозначим через φ_0. Поляризованное тело, оставаясь в целом нейтральным, создает дополнительное электрическое поле, обладающее в точке наблюдения потенциалом φ'. Это поле, накладываясь на первичное поле, приводит к тому, что в диэлектрике и в окружающем его пространстве возникает результирующее поле, обладающее в точке наблюдения потенциалом φ; окончательная поляризация тела обусловлена именно этим результирующим полем.

Потенциал результирующего поля

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \qquad (12.1)$$

соответственно

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \qquad (12.2)$$

Поскольку поляризованный диэлектрик можно рассматривать как совокупность молекулярных диполей, то потенциал его поля может быть определен как алгебраическая сумма потенциалов $\Sigma\varphi_{\text{дип}}$, создаваемых в точке наблюдения отдельными диполями.

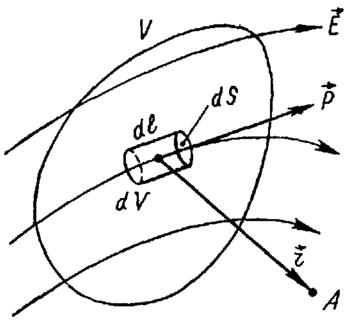

Рис. 24

Согласно (11.5) и (11.6) потенциал поля молекулярного диполя равен:

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \\ = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\text{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right).$$

В этих записях опущена диэлектрическая проницаемость ε, так как этот коэффициент представляет собой результат феноменологического (макроскопического) учета поляризации среды. Здесь поляризацию мы учитываем через потенциал $\varphi' = \Sigma\varphi_{\text{дип}}$, в силу чего уравнение (12.1) записывается так:

$$\varphi = \varphi_0 + \Sigma\varphi_{\text{дип}}. \tag{12.3}$$

Найдем общее выражение для потенциала поля поляризованного тела объемом V в точке наблюдения A (рис. 24). Выделим внутри тела элементарный объем dV; в целях наглядности берем его в виде прямого цилиндра, основание которого перпендикулярно напряженности $\vec{E}$, а следовательно, и вектору поляризации $\vec{P}$. Выделенный нами объем можно рассматривать как элементарный диполь с моментом $\vec{P}dV$. Он создает в точке наблюдения поле с потенциалом $d\varphi'$, который согласно (11.5) и (11.6) может быть определен по формуле

$$d\varphi' = \frac{\vec{P}dV}{4\pi\varepsilon_0}\text{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{P\,dV\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{12.4}$$

Потенциал поля всего поляризованного тела находится интегрированием по всему объему тела:

$$\varphi' = \int_V \frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0}\text{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)dV. \tag{12.5}$$

С учетом этого выражение (12.1) можно переписать:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_V \frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0}\text{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)dV. \tag{12.6}$$

Преобразуем подынтегральное выражение $\vec{P}\text{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)$ в соответствии с формулой векторного анализа:

$$\text{div}(\psi\vec{a}) = \psi\,\text{div}\,\vec{a} + \vec{a}\,\text{grad}\,\psi,$$

откуда

$$\vec{a}\,\text{grad}\,\psi = \text{div}(\psi\vec{a}) - \psi\,\text{div}\,\vec{a}.$$

Соответственно

$$\vec{P}\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)=\mathrm{div}\left(\frac{1}{r}\,\vec{P}\right)-\frac{1}{r}\,\mathrm{div}\,\vec{P},$$

и, следовательно, выражение (12.5) можно представить в виде

$$\varphi'=\int_V\frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)dV=\int_V\mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)dV-\int_V\frac{\mathrm{div}\,\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dV. \quad (12.7)$$

Преобразуем в этом выражении интеграл $\int\mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)dV$, используя формулу Остроградского—Гаусса:

$$\int_V\mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)dV=\oint_S\frac{P_n}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dS, \quad (12.8)$$

где P_n—нормальная составляющая вектора́ поляризации на поверхности поляризованного тела, S—его поверхность. Поэтому выражение (12.7) приобретает следующий вид:

$$\varphi'=\oint_S\frac{P_n}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dS-\int_V\frac{\mathrm{div}\,\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dV. \quad (12.9)$$

Нахождение потенциала поля поляризованного тела сведено к двум операциям интегрирования: по замкнутой поверхности и по объему. Сопоставляя выражение (12.9) с формулами для потенциала поля поверхностных и объемных зарядов (9.4) и (9.3), мы приходим к выводу, что в выражении (12.9) нормальная составляющая P_n вектора поляризации имеет физический смысл поверхностной плотности $\sigma_{\text{связ}}$ связанных зарядов, а $-(\mathrm{div}\,\vec{P})$— смысл объемной плотности $\rho_{\text{связ}}$ этих зарядов. Итак,

$$P_n=\sigma_{\text{связ}}, \quad (12.10)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{P}=-\rho_{\text{связ}}. \quad (12.11)$$

Мы доказали одну из основных теорем электростатики: поле поляризованного диэлектрика определяется распределением его поверхностных и объемных связанных зарядов.

Теперь выражению (12.3) можно придать вид

$$\varphi'=\oint_S\frac{\sigma_{\text{связ}}}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dS+\int_V\frac{\rho_{\text{связ}}}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dV. \quad (12.12)$$

В отличие от связанных зарядов все рассмотренные ранее заряды являлись свободными зарядами. Если первичное поле обусловлено ими, то

$$\varphi_0=\oint_S\frac{\sigma\,dS}{4\pi\varepsilon_0 r}+\int_V\frac{\rho\,dV}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (12.13)$$

Потенциал результирующего поля может быть найден по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \int\limits_V \frac{\rho + \rho_{\text{связ}}}{4\pi\varepsilon_0 r} dV + \oint\limits_S \frac{\sigma + \sigma_{\text{связ}}}{4\pi\varepsilon_0 r} dS. \qquad (12.14)$$

Согласно старой терминологии связанные заряды называли фиктивными зарядами. Объясняется это тем, что поляризованный диэлектрик в целом нейтрален ($\Sigma Q = 0$); только при наличии свободных зарядов общий заряд тела отличен от нуля. По этой причине заряды поляризованного тела считали нереальными, надуманными, введенными исключительно ради получения удобной расчетной формулы (12.4). Ниже будет показано, что это мнение неверно. Связанные заряды реальны, и мы должны в дальнейшем обосновать их формальное введение в (12.10) и (12.11).

§ 13. ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ОБЪЕМНЫЕ СВЯЗАННЫЕ ЗАРЯДЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$

Для обоснования соотношения (12.10) вернемся к однородному полю плоского конденсатора (упр. 8). На его пластинах сосредоточены свободные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 25). Под воздействием поля этих зарядов диэлектрик, вводимый в пространство между пластинами, поляризуется. Предполагается, что диэлектрик однороден, имеет объем V, толщину l и его боковые грани S параллельны пластинам и равны им по площади; между этими гранями и пластинами может существовать зазор. Обозначим через φ_0 и $\vec{E}_0$ соответственно потенциал и напряженность в какой-либо точке первичного поля, т. е. того поля, которое существовало между пластинами в вакууме (до введения диэлектрика). При поляризации диэлектрика на его гранях появляются связанные заряды: у пластины с отрицательным зарядом — суммарный положительный заряд молекулярных диполей; у пластины с положительным зарядом — отрицательный заряд тех молекулярных диполей, которые оказались около данной пластины.

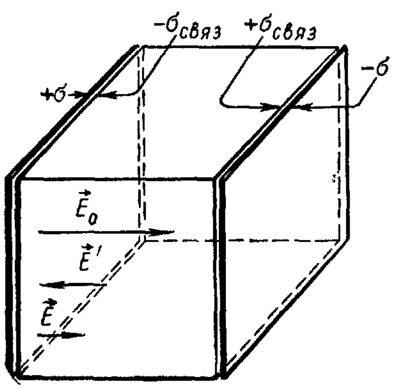

Рис. 25

Таким образом на гранях диэлектрика возникают связанные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma_{\text{связ}}$ и $-\sigma_{\text{связ}}$. Связанные заряды создают в диэлектрике добавочное поле φ', $\vec{E}'$, линии которого направлены