Потенциал результирующего поля может быть найден по формуле

$$\varphi=\varphi_0+\varphi'=\int\limits_V \frac{\rho+\rho_{связ}}{4\pi\varepsilon_0 r}dV+\oint\limits_S \frac{\sigma+\sigma_{связ}}{4\pi\varepsilon_0 r}dS. \qquad (12.14)$$

Согласно старой терминологии связанные заряды называли фиктивными зарядами. Объясняется это тем, что поляризованный диэлектрик в целом нейтрален ($\Sigma Q=0$); только при наличии свободных зарядов общий заряд тела отличен от нуля. По этой причине заряды поляризованного тела считали нереальными, надуманными, введенными исключительно ради получения удобной расчетной формулы (12.4). Ниже будет показано, что это мнение неверно. Связанные заряды реальны, и мы должны в дальнейшем обосновать их формальное введение в (12.10) и (12.11).

§ 13. ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ОБЪЕМНЫЕ СВЯЗАННЫЕ ЗАРЯДЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$

Для обоснования соотношения (12.10) вернемся к однородному полю плоского конденсатора (упр. 8). На его пластинах сосредоточены свободные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 25). Под воздействием поля этих зарядов диэлектрик, вводимый в пространство между пластинами, поляризуется. Предполагается, что диэлектрик однороден, имеет объем V, толщину l и его боковые грани S параллельны пластинам и равны им по площади; между этими гранями и пластинами может существовать зазор. Обозначим через φ_0 и $\vec{E}_0$ соответственно потенциал и напряженность в какой-либо точке первичного поля, т. е. того поля, которое существовало между пластинами в вакууме (до введения диэлектрика). При поляризации диэлектрика на его гранях появляются связанные заряды: у пластины с отрицательным зарядом — суммарный положительный заряд молекулярных диполей; у пластины с положительным зарядом — отрицательный заряд тех молекулярных диполей, которые оказались около данной пластины.

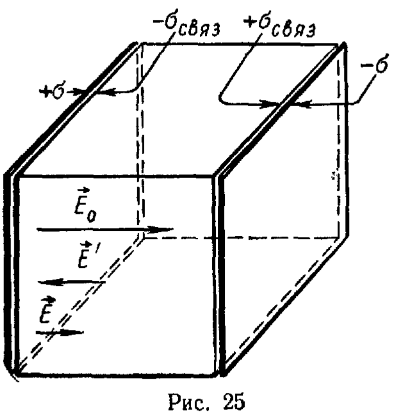

Рис. 25

Таким образом на гранях диэлектрика возникают связанные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma_{связ}$ и $-\sigma_{связ}$. Связанные заряды создают в диэлектрике добавочное поле φ', $\vec{E}'$, линии которого направлены противоположно линиям первичного поля. Для результирующего поля имеем:

$$\varphi=\varphi_0+\varphi'; \ \vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'.$$

В нашем случае

$$E=E_0-E'.$$

Исходя из определения вектора $\vec{P}$ как дипольного момента единицы объема поляризованного тела, мы можем считать произведение $\vec{P}V$ электрическим моментом диэлектрика. С другой стороны, этот момент может быть выражен как произведение заряда одной грани диэлектрика $\sigma_{\text{связ}}S$ на его толщину l, т. е.

$$PV=\sigma_{\text{связ}}Sl. \qquad (13.1)$$

Поскольку $V=Sl$, имеем:

$$P=\sigma_{\text{связ}}. \qquad (13.2)$$

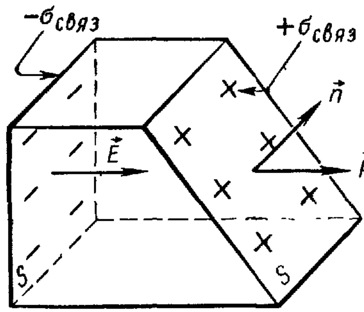

Рис. 26

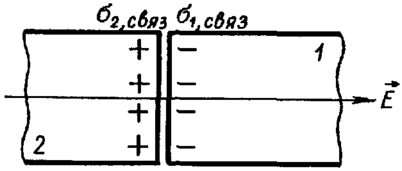

Рис. 27

В данном случае $P=P_n$, поэтому $P_n=\sigma_{\text{связ}}$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть в однородном поле находится усеченный образец из того же диэлектрика (рис. 26). Площади обеих граней S и S' связаны соотношением

$$S=S'\cos(\widehat{\vec{P},\vec{n}}).$$

Общий связанный заряд на обеих гранях численно одинаков

$$\sigma_{\text{связ}}S=\sigma'_{\text{связ}}S',$$

отсюда

$$\frac{\sigma'_{\text{связ}}}{\sigma_{\text{связ}}}=\frac{S}{S'}=\cos(\widehat{\vec{P},\vec{n}}),$$

$$\sigma'_{\text{связ}}=\sigma_{\text{связ}}\cos(\widehat{\vec{P},\vec{n}}).$$

Но согласно (13.2) $\sigma_{\text{связ}}=P$, поэтому в общем случае

$$\sigma'_{\text{связ}}=P\cos(\widehat{\vec{P},\vec{n}})=P_n. \qquad (13.3)$$

Мы здесь предполагали, что диэлектрик граничит с вакуумом. В общем случае границы двух диэлектриков (*1* и *2*, рис. 27) с различной поляризуемостью результирующая плотность связанных зарядов на границе раздела равна разности плотностей зарядов на каждой из соприкасающихся поверхностей:

$$\sigma_{\text{связ}}=\sigma_{1,\text{ связ}}-\sigma_{2,\text{ связ}},$$
$$\sigma_{\text{связ}}=P_{1n}-P_{2n},$$

что отвечает равенству $\sigma_{\text{связ}}=P_n^-$.

Для обоснования соотношения $\rho_{\text{связ}}=-\operatorname{div}\vec{P}$ используем прием усреднения величины истинного микроскопического поля. Естественно, что любое поляризованное тело при отсутствии свободных зарядов электрически нейтрально и что существование связанных зарядов может проявляться только в том, что в физически бесконечно малых объемах внутри поляризованного диэлектрика при определенном условии число некомпенсированных микрозарядов одного знака (положительных или отрицательных «концов» — полюсов молекулярных диполей) больше, чем другого знака. Далее будет показано, что это условие состоит в неоднородности электрических свойств диэлектрика (в зависимости восприимчивости α от координат).

При рассмотрении истинных микрозарядов в математически бесконечно малых объемах свободные и связанные заряды неразличимы; различие между ними возникает при усреднении по ф.б.м. объему, в силу чего под $\rho_{\text{макро}}$ следует понимать среднее значение истинной плотности зарядов:

$$\rho_{\text{макро}}=\bar{\rho}_{\text{микро}}=\rho+\rho_{\text{связ}}, \tag{13.4}$$

где ρ — плотность свободных зарядов, которую мы в дальнейшем будем считать равной нулю (рассматриваются диэлектрики).

Задача существенно облегчается, если ввести модельные представления. Рассмотрим внутри диэлектрика ф. б. м. объем в виде элементарно малого параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, параллельными декартовым осям координат (рис. 28); его объем $dV=dx\,dy\,dz$.

Пусть составляющие вектора поляризации имеют в вершине параллелепипеда $C(x, y, z)$ значения P_x, P_y, P_z. Из наличия положительной составляющей P_x вытекает, что в поляризованном состоянии диэлектрика задняя грань, обозначенная цифрой *2*, «пересекает» (в геометрическом смысле слова) молекулярные диполи таким образом, что вне параллелепипеда остаются отрицательные концы, а в параллелепипед «входят» положительные концы диполей.

Поясним это утверждение рисунком 29. Рассматриваемая вторая грань площадью $dS=dy\,dz$ пересекает все те диполи, центры которых расположены в примыкающем к грани слое толщиной $l\cos(\widehat{\vec{l},\vec{n}})$, где l — средняя длина диполя, ориентированного параллельно вектору поляризации $\vec{P}$, $\vec{n}$ — нормаль к площадке dS (при этом рассматривается абсолютная величина

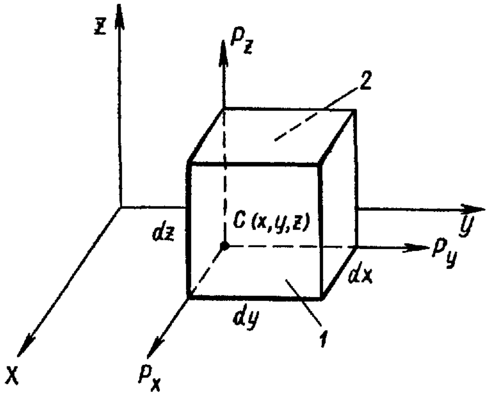

Рис. 28

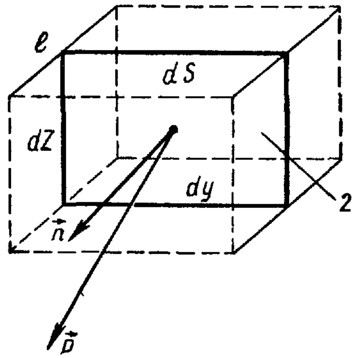

Рис. 29

косинуса). Объем этого слоя равен $dS\, l \cos(\widehat{\vec{l}, \vec{n}})$. Обозначая концентрацию диполей (их число в единице объема) через N, получим, что число диполей, рассекаемых площадкой dS, равно: $Nl\, dS \cos(\vec{l}, \vec{n})$.

Обратимся к определению вектора поляризации (§ 7):

$$\vec{P} = \Sigma\vec{p} = N\vec{p} = Nq\vec{l},$$

где q — заряд диполя одного знака; отсюда

$$l = \frac{P}{Nq}.$$

Соответственно, общий положительный заряд рассеченных диполей равен:

$$dQ_2 = Nql\, dS \cos(\widehat{\vec{l}, \vec{n}}) = P \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{n}})\, dS = P_n dS = P_x\, dy\, dz. \qquad (13.5)$$

Такова величина положительного заряда, попавшего через вторую грань в параллелепипед. Величину $P_n dS$ можно трактовать и как поверхностный положительный заряд, появившийся на внутренней стороне грани 2 [ср. (12.10)].

Нормальная составляющая вектора поляризации на передней грани 1 равна: $P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$; прилегающие к ней диполи эта грань пересекает таким образом, что внутри параллелепипеда расположены их отрицательные заряды. Положительные заряды диполей, оказавшиеся с наружной стороны грани, дают суммарный заряд:

$$dQ_1 = \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx\right) dy\, dx. \qquad (13.6)$$

В итоге смещения зарядов через грани 1 и 2 под действием внешнего поля происходит увеличение положительного заряда в параллелепипеде, равное разности выражений (13.5) и (13.6):

$$P_x\, dy\, dz - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy\, dz = -\frac{\partial P_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = -\frac{\partial P_x}{\partial x} dV.$$

Аналогично получаем выражение для приращения положительного заряда при смещении зарядов через другие две пары граней; полный положительный связанный заряд $\rho_{связ}\, dV$, входящий в параллелепипед при поляризации, определяется выражением

$$-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dV = \rho_{связ}\, dV,$$

откуда непосредственно вытекает:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{связ}.$$

Последнее выражение позволяет определить условие, при котором появляются связанные заряды. Преобразуем $\operatorname{div} \vec{P}$:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \alpha\varepsilon_0 \vec{E} = \alpha\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{grad} \alpha.$$

Стало быть, $\operatorname{div} \vec{P}$ и $\rho_{связ}$ могут быть отличны от нуля лишь тогда, когда либо диэлектрик неоднороден ($\operatorname{grad} \alpha \neq 0$), либо $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$. Последнее неравенство (при $\alpha = \mathrm{const}$) означает наличие свободных зарядов (исключенных нами из рассмотрения). Итак, объемные связанные заряды «появляются» лишь в неоднородных диэлектриках.

Как было показано в § 6, явление поляризации можно учесть в дифференциальном уравнении для напряженности электрического поля $\vec{E}$ двумя способами: либо формальным введением в формулу дивергенции относительной проницаемости ε и учетом одних только свободных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

либо введением объемной плотности связанных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{связ}}{\varepsilon_0}.$$

Подставляя в последнее выражение формулы для дивергенций векторов $\vec{D}$ и $\vec{P}$, мы приходим к важному уравнению связи между векторами поля:

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} - \operatorname{div} \vec{P}, \tag{13.7}$$

или, перейдя от равенства дивергенций к равенству векторов:

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P},$$

или

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{13.8}$$

Учитывая, что $\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, можно (13.8) переписать:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \alpha\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \alpha)\vec{E}.$$

Сопоставление этого выражения с формулой $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ позволяет получить связь между относительной проницаемостью диэлектрика и его восприимчивостью:

$$\varepsilon = 1 + \alpha. \tag{13.9}$$

§ 14. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В макроскопической электродинамике рассматриваются две идеализированные модели: проводники и диэлектрики.

Проводники характеризуются наличием в них «свободных» зарядов, которые под действием электрического поля неограниченно перемещаются внутри этих тел. В твердых и жидких металлах свободными зарядами являются электроны проводимости. В феноменологической теории процессы, наблюдающиеся в проводнике под действием поля, могут быть объяснены одинаково удовлетворительно при допущении подвижности зарядов как обоих знаков, так и одного знака.

Под действием поля в проводнике происходит перераспределение зарядов («наведение» зарядов, электрическая индукция), которое поясняет рисунок 30. Поле перемещенных зарядов, изображенное штриховыми линиями, накладывается на первичное поле. Внутри проводника первичное поле компенсируется до нуля, так как перемещение зарядов продолжается до тех пор, пока результирующее поле не станет равным нулю. Отсюда вытекает, что электростатическое (макроскопическое) поле внутри проводников существовать не может (это не относится к иным электрическим полям, как будет показано ниже).

При индукции в результате перераспределения зарядов происходит искажение поля также и вне проводника. Силовые линии результирующего электростатического поля располагаются по нормали к поверхности проводника: если бы вектор напряженности был ориентирован наклонно к поверхности проводника, то под действием тангенциальной составляющей этого вектора про-

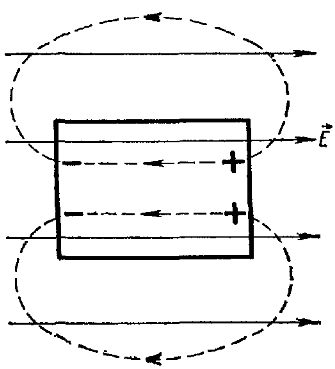

Рис. 30