§ 16. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯДА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Выражение (15.4) позволяет определить энергию системы точечных зарядов во внешнем электрическом поле, обусловленном неизвестным нам распределением зарядов. Принимая потенциал на бесконечном расстоянии от места нахождения точечных зарядов за начальный уровень отсчета потенциала (и потенциальной энергии) зарядов во внешнем поле, можно выразить эту энергию через работу поля по перемещению зарядов из соответствующих точек в бесконечность. Следовательно, энергия зарядов q_1, q_2, ..., q_n во внешнем поле с потенциалом $\varphi(x, y, z)$ равна:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i, z_i) \cdot q_i, \tag{16.1}$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точки, в которой находится заряд q_i.

Выражения (15.5) и (16.1), формально истолкованные, могут создать представление, что электрическая энергия есть энергия взаимодействия на расстоянии без участия промежуточной среды (дальнодействие). Такое представление исключает возможность локализации энергии в промежуточной среде и противоречит физической реальности. Можно найти другие выражения для энергии взаимодействия электрических зарядов, в которые явно входит объем пространства, занимаемый полем. Для этого решим вспомогательную задачу: найдем энергию уединенного заряженного проводника, имеющего потенциал φ_0 в однородной среде.

Электрическая энергия проводника равна работе против электрических сил отталкивания, затраченной при последовательном сообщении ему малых зарядов dq. Если заряды переносят из бесконечности (или Земли), где по условию $\varphi_\infty = 0$, то перенос каждого элементарного заряда dq на тело сопряжен с работой

$$-dA = \varphi dq,$$

где φ — потенциал тела в соответствующий момент. Полная работа внешних сил при зарядке тела равна:

$$-A = \int \varphi dq.$$

Перепишем это выражение с учетом связи между потенциалом φ, зарядом q и емкостью C проводника: $q = C\varphi$; $dq = Cd\varphi$, откуда

$$-A = \int_0^{\varphi_0} C\varphi\, d\varphi = \frac{C\varphi_0^2}{2} = \frac{q\varphi_0}{2} = \frac{q^2}{2C} = W. \tag{16.2}$$

Рассматривая аналогичным образом процесс зарядки плоского конденсатора как перенос элементарных зарядов с одной его обкладки на другую, мы получаем для энергии заряженного конденсатора:

$$W=\frac{1}{2}(Q\varphi_1-Q\varphi_2)=\frac{Q(\varphi_1-\varphi_2)}{2}, \qquad (16.3)$$

или, с учетом выражений для емкости плоского конденсатора $C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l}$ и $C=\frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}$ и связи разности потенциалов с напряженностью в однородном поле $\varphi_1-\varphi_2=El$, имеем:

$$W=\frac{C(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2 l^2}{2l}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}Sl.$$

Но $Sl=V$—пространство, занимаемое полем (без учета искажений у краев). Таким образом

$$W=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V. \qquad (16\ 4)$$

Появление объема в выражении для энергии взаимодействия электрических зарядов имеет глубокий физический смысл: электрическая энергия локализована в пространстве, занимаемом электрическим полем. Это положение доказано всеми опытами с переменными полями В силу этого можно ввести понятие объемной плотности энергии w, определяемой соотношением

$$w=\frac{dW}{dV}. \qquad (16.5)$$

В случае плоского конденсатора поле однородно, а следовательно, $w=\text{const}$, в силу чего $w=\frac{W}{V}$.

Исходя из соотношения (16.4), для плотности энергии имеем:

$$w=\frac{dW}{dV}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}=\frac{\vec{E}\vec{D}}{2}. \qquad (16.6)$$

Эта формула выражает плотность электрической энергии и в случае неоднородного поля, отсюда для энергии поля в объеме V получаем следующее важное выражение:

$$W=\int_V w\,dV=\int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}dV=\int_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}dV. \qquad (16.7)$$

В общем случае, учитывая первый интеграл (15.5) и выражение $\rho=\operatorname{div}\vec{D}$, имеем:

$$W=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV=\frac{1}{2}\int_V \varphi\operatorname{div}\vec{D}\,dV=\frac{1}{2}\int_V \operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV-$$

$$-\frac{1}{2}\int_V \vec{D}\operatorname{grad}\varphi\,dV=\frac{1}{2}\oint_S \varphi D_n\,dS+\frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E}\,dV.$$

Для полного поля, т. е. области пространства, на границах которой векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{D}$ обращаются в нуль, поверхностный интеграл исчезает и мы непосредственно приходим к выражению (16.7).

§ 17. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Резюмируем основные положения об электростатическом поле в классической электродинамике.

Электростатическое поле (поле вектора $\vec{E}$) обусловлено источниками, которыми являются электрические заряды (свободные и связанные). Источниками вектора $\vec{D}$ являются только свободные заряды. Электростатическое поле потенциально, т. е. циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, что иначе выражается через равенство нулю $\operatorname{rot}\vec{E}$.

Эти фундаментальные положения выражаются математически следующей системой уравнений электростатического поля (уравнений Максвелла) в дифференциальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho, \end{aligned}\right| \tag{17.1}$$

где ρ—объемная плотность свободных зарядов. В интегральной форме система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0, \\ &\int_V \operatorname{div}\vec{D}\,dV = \oint_S D_n dS = Q. \end{aligned}\right| \tag{17.2}$$

При выражении электрических величин в единицах системы СГС запись уравнений, содержащих D, ε и ε_0, принимает несколько иной вид:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho, \\ &\int_V \operatorname{div}\vec{D}\,dV = \oint_S D_n dS = 4\pi Q. \end{aligned}\right| \tag{17.3}$$

В систему основных уравнений поля включается и уравнение связи между $\vec{E}$ и $\vec{D}$ (материальное уравнение), учитывающее свойства среды, в которой существует поле:

в СИ— $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$,

в СГС— $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.