Для полного поля, т. е. области пространства, на границах которой векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{D}$ обращаются в нуль, поверхностный интеграл исчезает и мы непосредственно приходим к выражению (16.7).

§ 17. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Резюмируем основные положения об электростатическом поле в классической электродинамике.

Электростатическое поле (поле вектора $\vec{E}$) обусловлено источниками, которыми являются электрические заряды (свободные и связанные). Источниками вектора $\vec{D}$ являются только свободные заряды. Электростатическое поле потенциально, т. е. циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, что иначе выражается через равенство нулю $\operatorname{rot}\vec{E}$.

Эти фундаментальные положения выражаются математически следующей системой уравнений электростатического поля (уравнений Максвелла) в дифференциальной форме:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E}&=0,\\ \operatorname{div}\vec{D}&=\rho,\end{aligned}\right| \tag{17.1}$$

где ρ — объемная плотность свободных зарядов. В интегральной форме система принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}=0,\\ &\int_V \operatorname{div}\vec{D}\,dV=\oint_S D_n dS=Q.\end{aligned}\right| \tag{17.2}$$

При выражении электрических величин в единицах системы СГС запись уравнений, содержащих D, ε и ε_0, принимает несколько иной вид:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho,\\ &\int_V \operatorname{div}\vec{D}\,dV=\oint_S D_n dS=4\pi Q.\end{aligned}\right| \tag{17.3}$$

В систему основных уравнений поля включается и уравнение связи между $\vec{E}$ и $\vec{D}$ (материальное уравнение), учитывающее свойства среды, в которой существует поле:

в СИ — $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$,

в СГС — $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$.

Используем систему основных уравнений электростатического поля для вывода граничных условий для векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Как уже указывалось выше, потенциал поля при объемном и поверхностном распределении зарядов остается непрерывным. Непрерывна и первая производная потенциала по координатам (исключение — двойной слой — в данной книге не рассматривается).

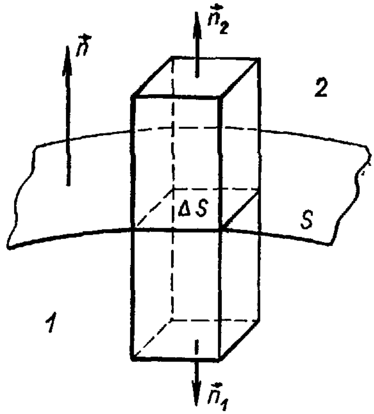

Рис 32

При решении дифференциальных уравнений для $\vec{E}$ и $\vec{D}$ появляются постоянные интегрирования, поэтому для однозначного определения векторов поля надо знать их свойства на границах раздела сред, т. е. граничные условия; с их помощью можно найти постоянные интегрирования и однозначно определить векторы поля.

а) Поведение вектора индукции при переходе через заряженную поверхность. Рассмотрим в электростатическом поле заряженную поверхность, разделяющую два изотропных диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 32). Обозначим через $\vec{n}$ нормаль к поверхности, направленную во вторую среду, фиксируем на поверхности элементарную площадку ΔS с поверхностным свободным зарядом $\sigma\Delta S$ и построим на ней прямую призму. Через $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ обозначим нормали к нижнему и верхнему основаниям призмы. Согласно уравнению Максвелла для дивергенции $\vec{D}$ (17.2) поток индукции через эту призму определяется выражением

$$\oint_S D_n\, dS = D_2 \cos(\widehat{\vec{D}_2, \vec{n}_2})\,\Delta S + D_1 \cos(\widehat{\vec{D}_1, \vec{n}_1})\,\Delta S + N'_D = \sigma\Delta S, \quad (17.4)$$

где N'_D — поток индукции через боковые грани, а первые два слагаемых — потоки через верхнее и нижнее основания. Учитывая выбранные направления нормалей, проекции $\vec{D}$ на нормаль $\vec{n}$ можно записать в виде

$$D_2 \cos(\widehat{\vec{D}_2, \vec{n}_2}) = D_{2n}; \quad D_1 \cos(\widehat{\vec{D}_1, \vec{n}_1}) = -D_{1n}.$$

Если приблизить основания призмы к заряженной поверхности на бесконечно малое расстояние, то поток N'_D через боковые грани станет бесконечно малым и им можно пренебречь. В этом случае

$$(D_{2n} - D_{1n})\,\Delta S = \sigma\Delta S,$$

откуда вытекает важное граничное условие для вектора $\vec{D}$:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \qquad (17.5)$$

При переходе через заряженную поверхность нормальная составляющая вектора индукции изменяется скачком на величину σ.

б) Поведение вектора индукции при переходе через незаряженную поверхность. Рассмотрим поверхность раздела двух диэлектриков, на которой нет свободных зарядов ($\sigma = 0$). Для данного случая из выражения (17.5) вытекает новое граничное условие:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0; \ D_{2n} = D_{1n}. \qquad (17.6)$$

На границе двух диэлектриков (при $\sigma = 0$) нормальная составляющая вектора индукции непрерывна (не испытывает скачка).

в) Поведение вектора напряженности электростатического поля на границе двух сред. Нормальная составляющая электрического вектора $\vec{E}$ испытывает скачок не только при переходе через поверхность со свободными зарядами, но и при переходе через поверхность со связанными зарядами, т. е. на границе раздела двух диэлектриков с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2; на существование связанных зарядов указывает различие проницаемостей ε_1 и ε_2 этих сред. В изотропных диэлектрических средах, рассмотрением которых мы ограничиваемся, связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ и их проекциями имеет один и тот же вид:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; \ D_n = \varepsilon\varepsilon_0 E_n; \ D_t = \varepsilon\varepsilon_0 E_t$$

(D_t, E_t — тангенциальные составляющие).

Из условия (17.6) следует, что на границе двух диэлектриков $\varepsilon_1\varepsilon_0 E_{1n} = \varepsilon_2\varepsilon_0 E_{2n}$, откуда

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (17.7)$$

Рассмотрим поведение тангенциальной составляющей электрического вектора на поверхности раздела двух сред. Пусть два диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 разделены поверхностью S (рис. 33). Проведем касательную плоскость к границе раздела двух диэлектриков в той точке, в которой хотят определить граничные условия. Разложим вектор $\vec{E}$ на две составляющие — нормальную, параллельную нормали к касательной поверхности, и касательную (тангенциальную) E_t, лежащую в касательной плоскости. Используем уравнение Максвелла для циркуляции вектора напряженности по малому контуру $ABCD$ (L) и через $\vec{l}$ обозначим единичный вектор, параллельный E_t во второй среде:

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = E_{2t}a - E_{1t}a + A' = 0,$$

где A' — работа перемещения единичного заряда на двух отрезках h. Стягиваем контур обхода к касательной поверхности, неограниченно уменьшая h; тогда в пределе работа на участках h обращается в нуль, откуда $E_{2t} - E_{1t} = 0$, т. е.

$$E_{2t} = E_{1t}. \qquad (17.8)$$

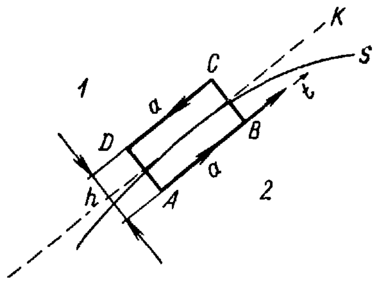

Рис 33

Этот вывод справедлив для границ раздела любых двух сред (границы проводника и диэлектрика, границы двух диэлектриков, границы двух проводников), если только на границе нет двойного слоя. Таким образом, на границе двух сред тангенциальная составляющая напряженности непрерывна (не испытывает скачка).

Отсюда непосредственно вытекает, как уже было установлено в § 14, что вектор $\vec{E}$ ориентирован нормально к поверхности проводника. Внутри проводника $\vec{E} = 0$, следовательно, $E_t = 0$; в силу непрерывности тангенциальная составляющая равна нулю и в точках диэлектрика, прилегающих к поверхности проводника снаружи, поэтому в этих точках $E = E_n$.

Из выражения (17.6) вытекает, что в точках диэлектрика у поверхности проводника

$$D_{2n} = \sigma, \qquad (17.9)$$

поскольку внутри проводника $D_{1n} = 0$. Учитывая связь между D и E, имеем для точек диэлектрика, прилегающих к проводнику:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (17.10)$$

К этому выводу мы пришли уже ранее при решении упражнений.

Следует уяснить себе условность найденных выше скачков: резкие границы рассматриваемых сред являются, конечно, идеализацией. На самом деле плотности зарядов при переходе через поверхность двух сред меняются непрерывно. Трудную задачу исследования поля в переходных областях такого рода удобно заменить рассмотрением скачкообразного изменения.

г) Преломление силовых линий на границе двух диэлектриков. На границе двух диэлектриков *1* и *2* с поверхностью раздела S (рис. 34) в общем случае $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$; для определенности допустим $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (например, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$). Разложим $\vec{E}_1$ в первой среде на нор-

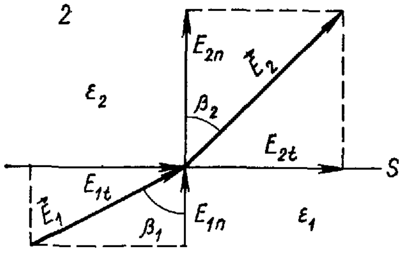

Рис. 34

мальную и тангенциальную составляющие (при этом в целях наглядности допущен необычный перенос вектора $\vec{E}_1$). Тангенциальная составляющая векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на границе непрерывна: $E_{1t}=E_{2t}$. Нормальная составляющая испытывает скачок, как это вытекает из (17.7). В нашем примере $E_{2n}=2E_{1n}$. Из простых геометрических соображений имеем:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2}=\frac{\dfrac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\dfrac{E_{2t}}{E_{2n}}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Последнее соотношение известно под названием закона преломления силовых линий.

Система уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E}&=0,\\ \operatorname{div}\vec{D}&=\rho,\end{aligned}\right| \qquad (17.11)$$

дополненная граничными условиями на поверхности раздела двух диэлектриков

$$\left.\begin{aligned}D_{2n}-D_{1n}&=\sigma,\\ E_{2t}&=E_{1t},\end{aligned}\right| \qquad (17.12)$$

граничными условиями на поверхности раздела проводника и диэлектрика

$$D_n=\sigma,$$
$$E_t=0$$

и, наконец, формулами связи

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi,$$

составляет полную систему уравнений электростатики изотропных диэлектриков и однородных проводников. Полнота системы уравнений поля означает:

1) если заданы плотности пространственного и поверхностного распределения свободных зарядов [$\rho(x, y, z)$ и $\sigma(x, y, z)$] и проницаемость $\varepsilon(x, y, z)$ во всех точках пространства, то записанные выше уравнения однозначно определяют электростатическое поле, т. е. значения $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в каждой точке пространства;

2) наоборот, если во всем пространстве заданы функции $\varepsilon(x, y, z)$ и $\vec{E}(x, y, z)$ (либо φ, либо $\vec{D}$), то система уравнений

электростатики однозначно определяет распределение свободных зарядов $\rho(x, y, z)$ и $\sigma(x, y, z)$.

Эти положения справедливы при условии, что исключаются из рассмотрения двойные слои (при переходе через которые потенциал испытывает скачок) и что заряды распределены в конечных объемах и на конечных поверхностях.

Скачкообразное изменение напряженности поля на границе проводника и диэлектрика модельно объясняется появлением на поверхности диэлектрика поверхностных связанных зарядов, т. е. некомпенсированных зарядов молекулярных диполей. Ранее (в § 15) это было рассмотрено на примере поля плоского конденсатора с однородным диэлектриком (см. рис. 25). Здесь с правой стороны поверхностные связанные заряды представляют собой суммарный положительный заряд концов молекулярных диполей, оказавшихся у правой грани; слева — отрицательный заряд тех молекулярных диполей, которые оказались у левой грани. Соответственно, на этих гранях поверхностная плотность связанных зарядов $+\sigma_{связ}$ и $-\sigma_{связ}$. В каждой точке диэлектрика результирующее поле $\vec{E}$ является результатом суперпозиции первичного поля $\vec{E}_0$, обусловленного свободными зарядами обкладок, распределенными с плотностью σ, и поля $\vec{E}'$ связанных поверхностных зарядов, имеющих поверхностную плотность $\sigma_{связ}$. Результирующее поле

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'.$$

В нашем случае

$$E=E_0-E'. \qquad (17.13)$$

Объемных связанных зарядов в диэлектрике нет, они появляются только при поляризации неоднородных диэлектриков.

Из соотношения (17.10) вытекает простая связь между поверхностной плотностью свободных зарядов σ, расположенных на обкладках, и их полем в вакууме ($\varepsilon=1$):

$$E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

(Индекс n опускается, так как вектор $\vec{E}_0$ нормален к поверхности.) Естественно предположить такую же связь между поверхностной плотностью связанных зарядов $\sigma_{связ}$ и обусловленным ими полем $\vec{E}'$:

$$E'=\frac{\sigma_{связ}}{\varepsilon_0}.$$

При этом уравнение (17.13) переписывается следующим образом:

$$E=E_0-E'=\frac{\sigma-\sigma_{связ}}{\varepsilon_0}. \qquad (17.14)$$

С другой стороны, состояние поляризации поддерживается результирующим полем $\vec{E}$, поэтому должна существовать прямая пропорциональность между $\sigma_{\text{связ}}$ и E:

$$\sigma_{\text{связ}} = \alpha\varepsilon_0 E, \tag{17.15}$$

где α — восприимчивость диэлектрика.

Подстановка уравнения (17.15) в (17.14) дает:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \alpha E, \tag{17.16}$$

откуда

$$E_0 = E + E' = E + \alpha E = (1+\alpha) E.$$

Сумма $(1+\alpha)$ получила, как известно, название относительной диэлектрической проницаемости ε:

$$1 + \alpha = \varepsilon.$$

Обе величины — восприимчивость α и проницаемость ε — являются основными электрическими характеристиками диэлектрика.

Из уравнения (17.16) вытекает, что $\varepsilon = \frac{E_0}{E}$, т. е. ε показывает, во сколько раз убывает напряженность поля при заполнении всего пространства, занимаемого полем, однородным диэлектриком Если диэлектрик заполняет лишь часть поля, ничего определенного об изменении поля сказать нельзя.

В поле конденсатора без диэлектрика из граничных условий (17.9) и (17.10) вытекает:

$$D_0 = \sigma = \varepsilon_0 E.$$

При наличии диэлектрика связь между $\vec{D}$ и вектором результирующего поля $\vec{E}$ в силу (17.16) имеет вид:

$$\vec{D} = (1+\alpha)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.$$

На примере однородного поля плоского конденсатора мы вновь пришли к основным соотношениям для электростатического поля в диэлектрике, которые были получены в § 6 и 13.

§ 18. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА (УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА — ЛАПЛАСА)

Часто задачи электростатики решить проще, если исходить из дифференциального уравнения для потенциала.

Из основных уравнений

$$\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \rho, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

при условии однородности диэлектрика $\varepsilon \doteq \text{const}$ вытекает:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad}\varphi) = \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\rho. \tag{18.1}$$