С другой стороны, состояние поляризации поддерживается результирующим полем $\vec{E}$, поэтому должна существовать прямая пропорциональность между $\sigma_{\text{связ}}$ и E:

$$\sigma_{\text{связ}} = \alpha\varepsilon_0 E, \tag{17.15}$$

где α — восприимчивость диэлектрика.

Подстановка уравнения (17.15) в (17.14) дает:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \alpha E, \tag{17.16}$$

откуда

$$E_0 = E + E' = E + \alpha E = (1+\alpha) E.$$

Сумма $(1+\alpha)$ получила, как известно, название относительной диэлектрической проницаемости ε:

$$1 + \alpha = \varepsilon.$$

Обе величины — восприимчивость α и проницаемость ε — являются основными электрическими характеристиками диэлектрика.

Из уравнения (17.16) вытекает, что $\varepsilon = \frac{E_0}{E}$, т. е. ε показывает, во сколько раз убывает напряженность поля при заполнении всего пространства, занимаемого полем, однородным диэлектриком Если диэлектрик заполняет лишь часть поля, ничего определенного об изменении поля сказать нельзя.

В поле конденсатора без диэлектрика из граничных условий (17.9) и (17.10) вытекает:

$$D_0 = \sigma = \varepsilon_0 E.$$

При наличии диэлектрика связь между $\vec{D}$ и вектором результирующего поля $\vec{E}$ в силу (17.16) имеет вид:

$$\vec{D} = (1+\alpha)\,\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.$$

На примере однородного поля плоского конденсатора мы вновь пришли к основным соотношениям для электростатического поля в диэлектрике, которые были получены в § 6 и 13.

§ 18. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА (УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА — ЛАПЛАСА)

Часто задачи электростатики решить проще, если исходить из дифференциального уравнения для потенциала.

Из основных уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \rho, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

при условии однородности диэлектрика $\varepsilon = \text{const}$ вытекает:

$$\operatorname{div} (\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad} \varphi) = \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho. \tag{18.1}$$

Оператор $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ носит название лапласиана и обозначается символом либо Δ, либо ∇^2; поэтому (18.1) можно переписать в виде

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{18.2}$$

Эта формула известна под названием уравнения Пуассона; уравнение выполняется в точках, в которых имеются свободные заряды. Для точек, где свободных зарядов нет, оно переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{18.3}$$

Уравнение Пуассона имеет фундаментальное значение для решения основной задачи электростатики — вычисления величин, характеризующих поле заданной системы зарядов на проводниках. Возможны два варианта этой задачи.

1) Заданы значения потенциалов проводников и требуется вычислить напряженность поля в пространстве между проводниками и распределение зарядов на них. Если все поле находится в однородной среде, то задача сводится к нахождению аналитического вида функции φ, которая: а) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в объеме, ограниченном поверхностями проводников; б) на бесконечности равна нулю; в) принимает заданные значения φ_i на поверхности проводников.

2) Заданы значения зарядов на проводниках и требуется вычислить потенциалы проводников, плотность зарядов на их поверхностях и напряженность поля в однородной среде между проводниками. Задача сводится к нахождению функции φ, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в точках среды между проводниками, равна нулю на бесконечности, принимает на поверхности проводников некоторые постоянные значения φ_i (не заданные) и удовлетворяет на поверхности проводников интегральному соотношению

$$-\varepsilon\varepsilon_0 \oint\limits_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = q_i, \tag{18.4}$$

где q_i — заряд i-го проводника, n — внешняя нормаль. Равенство (18.4) представляет собой преобразованную запись теоремы Остроградского — Гаусса в интегральной форме $\left(\text{с учетом равенства } E_n = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$.

Важное значение при решении задач имеет теорема единственности решений уравнений электродинамики. В приложении к электростатике эта теорема утверждает, что при достаточной полноте данных решаемой задачи, дополненных определенными граничными условиями, ей соответствует единственное решение. Короче: если найдено каким-либо образом решение основной задачи электростатики, то оно единственное.

Докажем эту теорему для сформулированного выше первого типа задач, применяя прием доказательства от противного. Допустим существование двух решений φ_1 и φ_2 и рассмотрим их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Используем первую формулу Грина:

$$\int_V (\psi \Delta\varphi + \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi)\, dV = \oint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS.$$

Полагая $\psi = \varphi$ и учитывая, что $\Delta\varphi = 0$, имеем:

$$\int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = \int_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (18.5)$$

Естественно, что левый интеграл надо брать по всему объему пространства между проводниками, правый — по поверхности всех проводников. На поверхности S каждого проводника $\varphi = 0$, поскольку функции φ_1 и φ_2 имеют на этой поверхности по условию одинаковые значения; отсюда получим:

$$\int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = 0.$$

Здесь подынтегральная функция произвольна и поэтому $\operatorname{grad}\varphi = 0$ во всех точках поля, что означает $\varphi = \mathrm{const}$.

Поскольку на поверхности проводников $\varphi = 0$, то и во всех точках пространства $\varphi \equiv 0$, т. е. $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Выше уже указывалось на сложность реальных задач по вычислению напряженности полей при наличии системы проводников и неоднородных диэлектриков разной формы и размеров.

Из курсов физики читатели часто выносят представление, будто влияние диэлектрика на величину поля можно всегда учесть введением коэффициента ε, показывающего, во сколько раз напряженность поля убывает по сравнению с напряженностью поля тех же зарядов в вакууме. Это справедливо, однако, только в том случае, если все поле заполнено однородным диэлектриком ($\varepsilon = \mathrm{const}$).

В реальных условиях надо учитывать поляризацию обычно неоднородных диэлектриков и распределения индуцированных зарядов на проводниках. На первичное поле с потенциалом φ_0, вызывающее поляризацию и появление индуцированных зарядов, накладывается дополнительное поле φ' связанных и индуцированных зарядов. Таким образом возникает результирующее поле с потенциалом $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, которым поддерживается окончательная поляризация диэлектриков и распределение индуцированных зарядов на проводниках.

При заполнении части первичного поля однородным диэлектриком, а тем более при наличии в поле неоднородных диэлектриков напряженность результирующего поля в отдельных точках может стать как больше, так и меньше напряженности первичного поля в этих точках. В качестве примера, иллюстрирующего это положение, рассмотрим классическую задачу о диэлектрическом шаре радиуса a, имеющего проницаемость ε_1 и помещенного в неограниченный диэлектрик с проницаемостью ε_2 при однородном первичном поле E_0. На рисунке 35 силовые линии вторичного поля поляризованного шара изображены штриховыми линиями (при условии $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), при этом на правой границе раздела возникает результирующий положительный связанный заряд с поверхностной плотностью

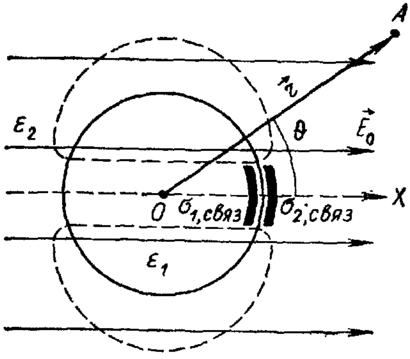

Рис. 35

$$(+\sigma_{1,\,\text{связ}} - \sigma_{2,\,\text{связ}}) > 0.$$

Сформулируем граничные условия, которым должно удовлетворять решение задачи. На поверхности шара (при $r = a$) для результирующих потенциалов и их производных имеем:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{а}$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \tag{б}$$

(индексы *1* и *2* относятся к смежным точкам внутри и вне шара). Первое из равенств обеспечивает непрерывность тангенциальных составляющих результирующей напряженности на поверхности шара (17.8), а второе выражает непрерывность нормальных составляющих вектора индукции (17.6). Помимо этого значение потенциала в любой точке результирующего поля должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{в}$$

Из теоремы единственности решений вытекает, что решение, удовлетворяющее этим граничным условиям, будет единственным.

Направим ось x параллельно вектору $\vec{E}_0$ через центр шара O и примем плоскость, содержащую точку O и расположенную перпендикулярно линиям поля, за эквипотенциальную поверхность $\varphi = 0$.

Учитывая осевую симметрию поля, решение имеет вид

$$\varphi_1 = -E_1 x,$$

$$\varphi_2 = -E_0 x + E_0 \frac{k}{r^2}\frac{x}{r} = -E_0 x + E_0 \frac{k}{r^2}\cos\theta. \tag{18.6}$$

Тем самым высказывается предположение, что внутри шара результирующее поле однородно и $E_1 = E_x$. Во внешнем пространстве на первичное поле, имеющее потенциал $(-E_0 x)$, накладывается поле поляризованного шара, потенциал которого на больших расстояниях имеет вид потенциала поля диполя с моментом $4\pi\varepsilon_0 E_0 k$, расположенного в центре шара (ср. § 11).

Легко проверить, что выражения (18.6) удовлетворяют уравнению Лапласа. Соответствующим выбором значений постоянных E_1 и k следует удовлетворить условиям (а) и (б) на границе шара. Произведя замену $x = r\cos\theta$, можно записать:

$$\varphi_1 = -E_1 r\cos\theta,$$
$$\varphi_2 = -E_0\left(r - \frac{k}{r^2}\right)\cos\theta.$$

Наложение граничных условий (при $r = a$) приводит к равенствам:

$$E_1 = E_0\left(1 - \frac{k}{a^3}\right),$$
$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_0\left(1 + \frac{2k}{a^3}\right).$$

Исключая k, получим:

$$E_1 = E_0\frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} = E_0\left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right); \quad k = a^3\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \qquad (18.7)$$

При $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ результирующая напряженность поля внутри шара меньше напряженности первичного поля, а при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ имеет место обратное явление. Если шар помещен в вакуум ($\varepsilon_2 = 1$), то напряженность поля внутри шара оказывается в $\frac{2+\varepsilon_1}{3}$ раза меньше E_0. Поле поляризованного шара во внешнем пространстве вычисляется как поле диполя, имеющего момент $4\pi\varepsilon_0 E_0 a^3\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$.

Переход к случаю проводящего шара радиуса a в однородном поле E_0 легко осуществить, приняв для шара $\varepsilon_1 = \infty$. Следовательно, поле E_1 внутри шара отсутствует, а поле во внешнем пространстве вычисляется как поле диполя, имеющего момент $4\pi\varepsilon_0 E_0 a^3$ и помещенного в центре шара.

§ 19. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

Найдем поле произвольной системы объемных зарядов в точках, расположенных на большом расстоянии от зарядов, исходя из формулы для потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{r}, \qquad (19.1)$$

где V — область пространства, в которой находится система зарядов. Наибольший линейный размер этой области обозначим через d.