

них расстояниях имеет вид потенциала поля диполя с моментом $4\pi\epsilon_0 E_0 k$, расположенного в центре шара (ср. § 11).

Легко проверить, что выражения (18.6) удовлетворяют уравнению Лапласа. Соответствующим выбором значений постоянных E_1 и k следует удовлетворить условиям (а) и (б) на границе шара. Произведя замену $x = r \cos \theta$, можно записать:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -E_1 r \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -E_0 \left(r - \frac{k}{r^2} \right) \cos \theta.\end{aligned}$$

Наложение граничных условий (при $r = a$) приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}E_1 &= E_0 \left(1 - \frac{k}{a^3} \right), \\ \epsilon_1 E_1 &= \epsilon_2 E_0 \left(1 + \frac{2k}{a^3} \right).\end{aligned}$$

Исключая k , получим:

$$E_1 = E_0 \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} = E_0 \left(1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \right); \quad k = a^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}. \quad (18.7)$$

При $\epsilon_1 > \epsilon_2$ результирующая напряженность поля внутри шара меньше напряженности первичного поля, а при $\epsilon_1 < \epsilon_2$ имеет место обратное явление. Если шар помещен в вакуум ($\epsilon_2 = 1$), то напряженность поля внутри шара оказывается в $\frac{2 + \epsilon_1}{3}$ раза меньше E_0 . Поле поляризованного шара во внешнем пространстве вычисляется как поле диполя, имеющего момент $4\pi\epsilon_0 E_0 a^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}$.

Переход к случаю проводящего шара радиуса a в однородном поле E_0 легко осуществить, приняв для шара $\epsilon_1 = \infty$. Следовательно, поле E_1 внутри шара отсутствует, а поле во внешнем пространстве вычисляется как поле диполя, имеющего момент $4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$ и помещенного в центре шара.

§ 19. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

Найдем поле произвольной системы объемных зарядов в точках, расположенных на большом расстоянии от зарядов, исходя из формулы для потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (19.1)$$

где V — область пространства, в которой находится система зарядов. Наибольший линейный размер этой области обозначим через d .

Начало координат O (рис. 36) выберем где-либо в пределах объема V , радиус-вектор, направленный в точку наблюдения A , обозначим через $\vec{R}_0(x_1, x_2, x_3)$, а радиус-вектор точки истока M с элементарным зарядом ρdV через $\vec{r}'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Нас по условию будут интересовать только участки поля, для которых

$$R_0 \gg d. \quad (19.2)$$

Разложим функцию $\frac{1}{r}$, входящую в формулу (19.1), в ряд Тейлора по степеням ξ_i вблизи начала координат O :

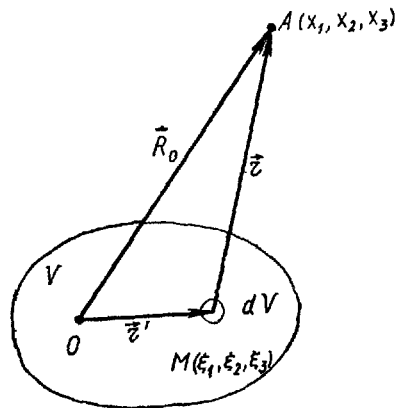


Рис. 36

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = & \frac{1}{R_0} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \xi_i \xi_k \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} + \dots \end{aligned} \quad (19.3)$$

При подстановке этого разложения в (19.1) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left\{ \frac{\int \rho dV}{R_0} + \sum \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \cdot \int \xi_i \rho dV + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \int \xi_i \xi_k \rho dV + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Последнее выражение можно переписать иначе:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n, \quad (19.5)$$

где последнее слагаемое φ_n прямо пропорционально $\frac{1}{R_0^n}$.

Первое слагаемое φ_1 выражает потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат и равного алгебраической сумме всех зарядов системы.

Второе слагаемое

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \int \xi_i \rho dV \quad (19.6)$$

допускает простую интерпретацию. Вычислим выражение в квадратных скобках:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} = - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi_i} \Big|_{r=R_0} = \frac{x_i}{R_0^3}, \quad (19.7)$$

где $\frac{\partial r}{\partial \xi_i}$ находят дифференцированием по ξ_i :

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2.$$

В свою очередь, интеграл $\int \xi_i \rho dV$ можно рассматривать как соответствующую составляющую P_i вектора

$$\vec{P} = \int \vec{r}' \rho dV. \quad (19.8)$$

Из соотношений (19.7) и (19.8) имеем:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{R_0^3} P_i = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}. \quad (19.9)$$

Сопоставляя это выражение с (11.5), убеждаемся, что φ_2 представляет собой потенциал поля электрического диполя с моментом \vec{P} , помещенного в начале координат. Соответственно потенциал φ_2 называют дипольным потенциалом системы, а вектор \vec{P} — дипольным моментом системы.

Третий член разложения (19.4) имеет вид

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \cdot \int \xi_i \xi_k \rho dV \right\}. \quad (19.10)$$

Эту часть потенциала называют квадрупольным моментом системы. Квадруполем называют систему четырех зарядов $(+q, -q, +q, -q)$, расположенных в вершинах параллелограмма (рис. 37).

Таким образом, потенциал произвольной системы зарядов на большом расстоянии может быть представлен в виде суммы потенциалов точечного заряда, диполя, квадруполя и т. д. Этот метод широко применяется в теории и известен под названием разложения по мультиполям.

§ 20. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ СО СТОРОНЫ ПОЛЯ

На элементарные заряды, как свободные, так и связанные, со стороны электрического поля действуют механические силы, называемые иногда пондеромоторными силами.

При электростатическом равновесии зарядов эти силы приложены в конечном счете к заряженным или поляризованным телам. В связи с тем что взаимно отталкивающиеся элементарные заряды не могут покинуть уединенный проводник, к поверхности проводника приложены силы, стремя-

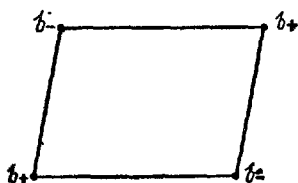


Рис. 37.