$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r=R_0} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \xi_i}\bigg|_{r=R_0} = \frac{x_i}{R_0^3}, \tag{19.7}$$

где $\frac{\partial r}{\partial \xi_i}$ находят дифференцированием по ξ_i:

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2.$$

В свою очередь, интеграл $\int \xi_i \rho\, dV$ можно рассматривать как соответствующую составляющую P_i вектора

$$\vec{P} = \int \vec{r}' \rho\, dV. \tag{19.8}$$

Из соотношений (19.7) и (19.8) имеем:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{R_0^3} P_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{P}\vec{R}_0}{R_0^3}. \tag{19.9}$$

Сопоставляя это выражение с (11.5), убеждаемся, что φ_2 представляет собой потенциал поля электрического диполя с моментом $\vec{P}$, помещенного в начале координат. Соответственно потенциал φ_2 называют дипольным потенциалом системы, а вектор $\vec{P}$ — дипольным моментом системы.

Третий член разложения (19.4) имеет вид

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r=R_0} \cdot \int \xi_i \xi_k \rho\, dV \right\}. \tag{19.10}$$

Эту часть потенциала называют квадрупольным моментом системы. Квадруполем называют систему четырех зарядов ($+q$, $-q$, $+q$, $-q$), расположенных в вершинах параллелограмма (рис. 37).

Таким образом, потенциал произвольной системы зарядов на большом расстоянии может быть представлен в виде суммы потенциалов точечного заряда, диполя, квадруполя и т. д. Этот метод широко применяется в теории и известен под названием разложения по мультиполям.

§ 20. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ СО СТОРОНЫ ПОЛЯ

На элементарные заряды, как свободные, так и связанные, со стороны электрического поля действуют механические силы, называемые иногда пондеромоторными силами. При электростатическом равновесии зарядов эти силы приложены в конечном счете к заряженным или поляризованным телам. В связи с тем что взаимно отталкивающиеся элементарные заряды не могут покинуть уединенный проводник, к поверхности проводника приложены силы, стремя-

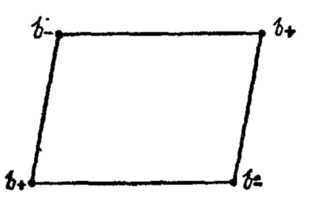

Рис. 37.

щиеся его растянуть. Подобные силы приложены и к поверхности неуединенного проводника, находящегося в электростатическом поле, заполненным однородным диэлектриком. На элемент поверхности проводника dS действует сила

$$df = \sigma (E - E') dS, \qquad (20.1)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов элемента dS, E — напряженность результирующего поля с внешней стороны проводника около элемента dS, обусловленного всеми зарядами, E' — напряженность поля, обусловленного зарядом элемента dS в прилегающих к нему точках (рис. 38).

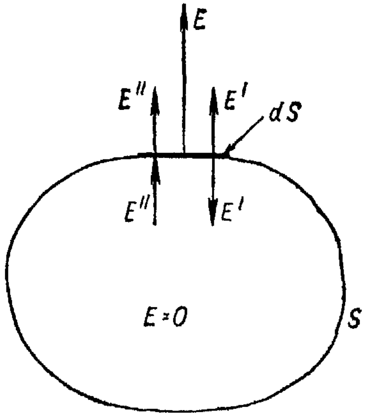

Рис 38

В формуле (20.1) фигурирует разность напряженностей $E - E'$, поскольку заряд σdS сам на себя не действует. Обозначим через E'' напряженность поля в точках элемента поверхности dS, обусловленного всеми зарядами, кроме заряда σdS. В двух смежных точках, лежащих по разные стороны элемента dS, поле E'' этих зарядов одинаково Запишем два равенства:

$$\left.\begin{aligned} E' + E'' &= E, \\ E' - E'' &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (20.2)$$

Физический смысл первого равенства прост: напряженность результирующего поля около элемента dS складывается из напряженностей двух полей — поля элементарного заряда σdS и поля всех остальных зарядов. Второе равенство означает, что внутри проводника поля нет. Из соотношения (20 2) вытекает:

$$E' = E'' = \frac{1}{2} E,$$

откуда элементарная сила:

$$df = \frac{\sigma E}{2} dS.$$

Поскольку плотность свободных зарядов $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E_n$, а $E_n = E$, имеем:

$$df = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} dS. \qquad (20.3)$$

При условии однородности поля на единицу поверхности проводника действует сила, численно равная

$$p=\frac{df}{dS}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \qquad (20.4)$$

которую называют поверхностной плотностью сил. Она направлена по нормали к поверхности и по модулю равна плотности энергии поля $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$. Общую силу $\vec{F}$, действующую на проводник, находят интегрированием по всей поверхности проводника:

$$\vec{F}=\varepsilon\varepsilon_0 \oint_S \vec{n}\,\frac{E^2}{2}\,dS, \qquad (20.5)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали. В случае одного уедненного заряженного проводника $\vec{F}=0$.

Иногда задачу вычисления сил поля решают проще через выражение для энергии W системы проводников как функции координат. Пусть при бесконечно малом перемещении одного проводника изменяется только одна координата, которую обозначим q, а заряды всех проводников при этом не изменяются. Если исключено участие других видов энергии в изменении энергии системы, то работа δA сил поля при элементарном перемещении dq производится целиком за счет убыли энергии поля δW:

$$\delta A=-\delta W_e, \qquad (20.6)$$

где индекс e означает неизменность зарядов при изменении энергии. Поскольку $\delta W_e=\frac{\partial We}{\partial q}dq$, то

$$\delta A=-\frac{\partial W_e}{\partial q}\,dq. \qquad (20.7)$$

Используем формулу механики

$$\delta A=Q_q\,dq, \qquad (20.8)$$

где Q_q — обобщенная сила, соответствующая координате q. Отсюда

$$Q_q=-\frac{\partial W_e}{\partial q}. \qquad (20.9)$$

Если q является координатой в прямоугольной системе координат, то формула (20.9) выражает проекцию силы на направление q; если dq означает элементарный угол поворота проводника вокруг некоторой оси, то (20.9) определяет момент сил поля относительно этой оси (см. упр. 17).

Рассмотрим вкратце задачу вычисления сил, действующих на диэлектрик в электростатическом поле. Обозначаем через $\vec{f}\,dV$ силу, действующую на элемент объема dV диэлектрика; $\vec{f}$ — объемная плотность сил. Опуская вычисления, запишем их окончательный результат:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right), \qquad (20.10)$$

где τ — плотность диэлектрика. Первый член $\vec{f}_1 = \rho\vec{E}$ выражает плотность силы, действующей на свободные электрические заряды. Другая часть

$$\vec{f}_2 = -\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right)$$

отлична от нуля только в диэлектриках. Член $\left(-\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon\right)$ появляется только в неоднородных диэлектриках; на границе диэлектрика с вакуумом он выражает плотность силы, направленной по нормали к поверхности диэлектрика и втягивающей диэлектрик в вакуум. Широко известные и рассматриваемые во всех школьных учебниках опыты электростатики (притяжение заряженными телами бумажек, бузиновых шариков и др.) объясняются именно этой силой. Притяжение поляризованного полем диэлектрика к заряженному телу можно также объяснить его втягиванием в область бо́льших напряженностей поля (поскольку у диэлектрика появляется индуцированный дипольный момент). На школьном уровне притяжение бумажки к эбонитовой палочке объясняется различием по знаку и модулю сил взаимодействия зарядов палочки со связанными зарядами, появляющимися при поляризации на противоположных сторонах бумажки. Член $\frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right)$ характеризует распределение сил в объеме диэлектрика; он ответствен за явление электрострикции.

Упражнения

16. Найдите потенциал поля объемно заряженного шара радиуса a при $\rho = \mathrm{const}$, $\varepsilon = \mathrm{const}$ внутри и вне шара, исходя из дифференциального уравнения для потенциала (уравнения Пуассона — Лапласа).

Указание. Следует воспользоваться сферической системой координат При определении четырех постоянных интегрирования следует использовать свойства потенциала и его первой производной $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -E$ при объемном распределении зарядов.

17. Сопоставьте величины электрических энергий уединенных шаров радиуса a при $\varepsilon = 1$ в случае равномерного распределения заряда Q: 1) по поверхности, 2) по объему, исходя из уравнения (15.5) и решения упражнения 16.

18. Найдите энергию диполя ($\vec{p} = \mathrm{const}$) во внешнем однородном поле. При исследовании решения рассмотрите устойчивость обоих положений равновесия диполя, опираясь на принцип минимума потенциальной энергии.

19. Найдите действующий на диполь вращающий момент, исходя из выражения для энергии диполя во внешнем однородном поле.

Указание. Воспользуйтесь формулой (20.9).