Рассмотрим циркуляцию векторов $\vec{E}$ и $\vec{E}_{стор}$ по замкнутому контуру цепи (содержащей источник и внешнюю цепь). Стационарное поле образовано зарядами и является потенциальным полем, поэтому циркуляция электрического вектора стационарного поля равна нулю. В самом деле, при определении циркуляции вектора $\vec{E}$ вдоль цепи (см. рис. 40) мы обходим внешнюю цепь на пути AB по полю, а затем участок BA против поля кулоновских сил. Для всей цепи, с учетом ее полного сопротивления $R+r$ (где r — сопротивление источника сторонней ЭДС), закон Ома записывается в виде

$$I(R+r)=\oint_L (E_l\,dl + E_{l,\,стор}\,dl) = \oint_L E_{l,\,стор}\,dl = \mathscr{E}_{стор}. \quad (21.6)$$

Отсюда вытекает определение ЭДС как циркуляции вектора $\vec{E}_{стор}$ по замкнутой цепи или как полного падения напряжения на сопротивлении R внешней цепи и на сопротивлении r источника:

$$\mathscr{E} = IR + Ir. \quad (21.7)$$

Здесь $IR=U$ представляет собой напряжение на зажимах источника, Ir — потеря напряжения внутри источника. Как известно, U зависит от нагрузки, т. е. от величины тока. При уменьшении внешнего сопротивления (т. е. при росте нагрузки) возрастает потеря напряжения внутри источника Ir, и, поскольку ЭДС исправно действующего источника практически неизменна, соответственно убывает $U=IR$.

§ 22. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Как в практических приложениях, так и в теории весьма важное значение имеет понятие плотности тока (ток, протекающий через единицу поперечного сечения проводника). Пусть S_0 — поперечное сечение однородного проводника (рис. 41), тогда при постоянном токе плотность тока определяется как частное:

$$j = \frac{I}{S_0}. \quad (22.1)$$

В общем случае неравномерного распределения тока по площади S_0 надо от частного (22.1) перейти к производной:

$$j = \frac{dI}{dS_0}. \quad (22.2)$$

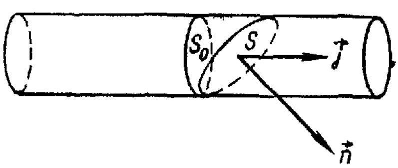

Рис. 41

Выражения (22.1) и (22.2) определяют численное значение плотности тока; плотность тока $\vec{j}$ — вектор, направление которого совпадает с направлением скорости положительных зарядов; если $\vec{n}_0$ — единичный вектор, направленный по току и, следовательно, перпендикулярный к S_0, то

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_0}\vec{n}_0. \qquad (22.3)$$

Представим себе в том же проводнике произвольное сечение S (см. рис. 41) с нормалью $\vec{n}$. Очевидно, что $S_0 = S\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{n}})$, а при переходе к элементам поверхности: $dS_0 = dS\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{n}})$, поэтому выражение (22.2) можно преобразовать:

$$dI = jdS_0 = j\,dS\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{n}}) = j_n dS. \qquad (22.4)$$

Значение тока (силу тока), проходящего через произвольную поверхность, находим интегрированием по всей поверхности:

$$I = \int\limits_S j_n dS. \qquad (22.5)$$

Поле вектора плотности тока изображают линиями, называемыми для краткости линиями тока. В каждой точке этой линии вектор $\vec{j}$ направлен по касательной.

Понятие плотности тока позволяет придать закону Ома новую форму. Выделим в поле тока (рис. 42) элементарный прямой цилиндр длиной Δl, основания которого ΔS_0 перпендикулярны $\vec{j}$. Если его рассматривать как участок проводника с сопротивлением ΔR, то для него закон Ома запишется в виде

$$\Delta I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta R}.$$

Считаем поле на малом участке Δl однородным. Используя известную формулу, определяющую сопротивление проводника, $\Delta R = \rho\frac{\Delta l}{\Delta S_0}$, получим из предыдущих формул выражение для тока через цилиндр:

$$\Delta I = \frac{E\Delta l}{\rho\frac{\Delta l}{\Delta S_0}} = j\Delta S_0.$$

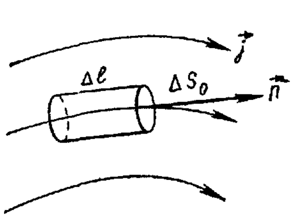

Рис. 42

После сокращений имеем:

$$j = \frac{E}{\rho} = \gamma E, \qquad (22.6)$$

где ρ — удельное сопротивление, γ — удельная электропроводность вещества проводника.

В изотропных средах вектор плотности тока и вектор напряженности по направлению совпадают, поэтому можно перейти к векторной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \tag{22.7}$$

Это соотношение выражает закон Ома в дифференциальной форме. Оно не содержит дифференциалов, а свое название получило потому, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной определенной точке проводника. В общем случае в рассматриваемой точке проводника может действовать и стороннее поле $\vec{E}_{\text{стор}}$, и тогда закон Ома в дифференциальной форме приобретает вид

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \tag{22.8}$$

§ 23. ДРУГИЕ ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Часто приходится применять другие законы постоянного тока в дифференциальной форме. Найдем дифференциальную форму закона Джоуля — Ленца:

$$Q_m = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \tag{23.1}$$

где Q_m — количество теплоты, выделенное током I в проводнике с сопротивлением R за 1 с; все величины здесь выражены в единицах одной и той же системы (СИ или СГС), в силу чего отсутствует множитель 0,24.

Обозначим через q_m количество теплоты, выделенное током в единице объема за единицу времени. Очевидно,

$$q_m = \frac{Q_m}{V},$$

где V — объем проводника, или в общем случае:

$$\left. \begin{aligned} q_m &= \frac{dQ_m}{dV}, \\ Q_m &= \int_V q_m dV. \end{aligned} \right| \tag{23.2}$$

Вычислим количество теплоты ΔQ_m, выделившееся в элементарном цилиндре объемом $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S_0$. В соответствии с выражением (23.1) имеем:

$$\Delta Q_m = j \Delta S_0 E \Delta l,$$

откуда

$$q_m = \frac{\Delta Q_m}{\Delta V} = \frac{j \Delta S_0 E \Delta l}{\Delta S_0 \Delta l} = jE. \tag{23.3}$$

Мы получили закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме, который можно также записать, используя закон Ома (22.7):

$$q_m = jE = \gamma E^2 = \frac{E^2}{\rho} = \rho j^2 = \frac{j^2}{\gamma}. \tag{23.4}$$