В изотропных средах вектор плотности тока и вектор напряженности по направлению совпадают, поэтому можно перейти к векторной форме

$$\vec{j}=\gamma\vec{E}. \qquad (22.7)$$

Это соотношение выражает закон Ома в дифференциальной форме. Оно не содержит дифференциалов, а свое название получило потому, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной определенной точке проводника. В общем случае в рассматриваемой точке проводника может действовать и стороннее поле $\vec{E}_{\text{стор}}$, и тогда закон Ома в дифференциальной форме приобретает вид

$$\vec{j}=\gamma\,(\vec{E}+\vec{E}_{\text{стор}}). \qquad (22.8)$$

§ 23. ДРУГИЕ ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Часто приходится применять другие законы постоянного тока в дифференциальной форме. Найдем дифференциальную форму закона Джоуля — Ленца:

$$Q_m=IU=I^2R=\frac{U^2}{R}, \qquad (23.1)$$

где Q_m — количество теплоты, выделенное током I в проводнике с сопротивлением R за 1 с; все величины здесь выражены в единицах одной и той же системы (СИ или СГС), в силу чего отсутствует множитель 0,24.

Обозначим через q_m количество теплоты, выделенное током в единице объема за единицу времени. Очевидно,

$$q_m=\frac{Q_m}{V},$$

где V — объем проводника, или в общем случае:

$$\left.\begin{aligned} q_m&=\frac{dQ_m}{dV},\\ Q_m&=\int\limits_V q_m dV. \end{aligned}\right| \qquad (23.2)$$

Вычислим количество теплоты ΔQ_m, выделившееся в элементарном цилиндре объемом $\Delta V=\Delta l\cdot\Delta S_0$. В соответствии с выражением (23.1) имеем:

$$\Delta Q_m=j\Delta S_0 E\Delta l,$$

откуда

$$q_m=\frac{\Delta Q_m}{\Delta V}=\frac{j\Delta S_0 E\Delta l}{\Delta S_0\Delta l}=jE. \qquad (23.3)$$

Мы получили закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме, который можно также записать, используя закон Ома (22.7):

$$q_m=jE=\gamma E^2=\frac{E^2}{\rho}=\rho j^2=\frac{j^2}{\gamma}. \qquad (23.4)$$

Для правильного перехода от интегральной формы (23.1) к дифференциальной полезно помнить, что аналогом I является j, аналогом $U \to E$, аналогом $R \to \rho$. Следует отметить, что закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме относится к количеству теплоты, выделяемому в единице объема. Обычный для дифференциальных соотношений переход к характеристике явления в «точке» лишен смысла (джоулева теплота «в точке» равна нулю).

Перейдем к первому правилу Кирхгофа: в каждой точке разветвления (узла) алгебраическая сумма токов равна нулю ($\Sigma I = 0$). Вспомним, что это правило выведено из закона сохранения электрических зарядов и, далее, из того факта, что в цепях постоянного тока нигде не происходит накопления зарядов.

Фиксируем в поле тока замкнутую поверхность. В ограничиваемый его объем за данный промежуток времени втекает такое же количество электричества, сколько из него вытекает за то же время; иначе говоря, алгебраическая сумма токов через замкнутую поверхность при стационарном токе равна нулю. Учитывая уравнение (22.5), можно придать первому правилу Кирхгофа следующий вид:

$$\oint_S j_n \, dS = 0, \tag{23.5}$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности S.

Преобразуем этот интеграл по формуле Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S j_n \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV, \tag{23.6}$$

где V—объем проводника, охватываемый замкнутой поверхностью S. Поскольку равенство (23.6) имеет место при произвольных объемах, из него следует:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \tag{23.7}$$

Соотношение (23.7) выражает первое правило Кирхгофа в дифференциальной форме; обычно его называют уравнением непрерывности стационарного тока. Из него вытекает, что линии тока при стационарном токе не имеют источников, т. е. они замкнуты сами на себя.

Выражение (23.7) справедливо, как указывалось, только для стационарных токов. В случаях включения, выключения и вообще изменения тока, а также ко всем видам переменного тока оно уже неприменимо, так как в указанных случаях происходит либо накопление, либо растекание зарядов. Все провода линий передачи и электрических устройств (потребителей) обладают некоторой емкостью, которая при включении тока заряжается, при выключении разряжается. При переменном токе процессы зарядки и разрядки чередуются периодически.

Ток разрядки какой-либо емкости в соответствии с законом сохранения заряда равен убыли заряда за единицу времени:

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \tag{23.8}$$

Охватим мысленно эту емкость (или ее часть) замкнутой поверхностью S и перейдем к общему случаю объемного распределения заряда $Q = \int\limits_V \rho\, dV$. При разрядке через поверхность S вытекает наружу объемный ток $I = \oint\limits_S j_n\, dS$. Таким образом

$$\oint\limits_S j_n\, dS = -\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV. \tag{23.9}$$

Преобразуя левую часть по теореме Остроградского—Гаусса и приравнивая подынтегральные выражения, после внесения символа производной под знак интеграла получим выражение

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{23.10}$$

которое представляет собой дифференциальную запись уравнения непрерывности тока. Оно выражает закон сохранения заряда и показывает, что ток из единицы объема равен убыли заряда этого объема за единицу времени. При изменении знаков слева и справа из уравнения (23.10) следует, что ток, втекающий в единицу объема, равен приращению заряда этого объема за единицу времени.

Упражнения

20. Пространство между обкладками шарового конденсатора (радиусами r_1 и r_2) заполнено проводящей средой с удельной электрической проводимостью γ. Найдите ток, проходящий через конденсатор, при условии постоянства разности потенциалов на обкладках ($\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$), и омическое сопротивление шарового слоя.

21. Вычислите сопротивление заземления при наличии сферического заземлителя с радиусом r (рис. 43), зарытого под землю $\left(\text{электропроводность почвы } \gamma = \frac{1}{\rho}\right)$.

Указание. Исходите из решения упражнения 20. При исследовании решения найдите омическое сопротивление полусферического заземлителя, погруженного вровень с поверхностью почвы.

22. Покажите, что сопротивление заземлителя линии связи практически не зависит от расстояния между станциями (рассмотрите два сферических заземлителя радиуса a, погруженных в неограниченную среду с электропроводностью γ).

Указание. Считайте, что расстояние r между электродами-шарами весьма велико по сравнению с радиусом шара. При этом условии можно

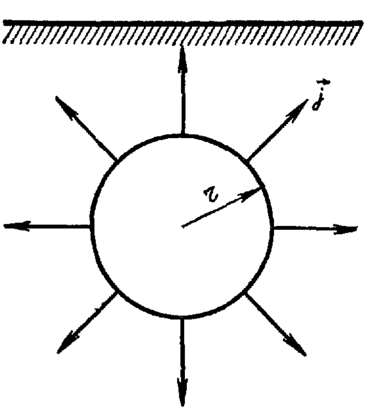

Рис. 43

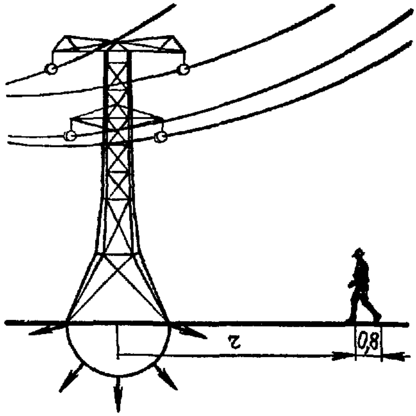

Рис. 44

пренебречь индукционным взаимодействием и считать, что заряды распределены по поверхности шаров равномерно.

23. Вычислите величину шагового напряжения $U_ш$, под которым оказывается человек, приближающийся к полусферическому заземлителю (рис. 44). Шаговое напряжение представляет собой разность потенциалов между двумя точками на поверхности почвы, расположенными на расстоянии 0,8 м друг от друга (шаг) и лежащими на одном и том же радиусе, проведенном из центра заземлителя.

24. Выведите закон преломления линий тока на границе раздела двух проводников, имеющих различную электропроводность γ_1 и γ_2.

Указание. Для определенности считайте $\gamma_1 = 2\gamma_2$. Исходите из закона Ома: $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. В изотропной среде такой же вид имеют и соотношения между нормальными и тангенциальными составляющими $\vec{j}$ и $\vec{E}$. Необходимо учесть непрерывность касательных составляющих $\vec{E}_t$, и нормальной составляющей $\vec{j}_n$ (что вытекает из уравнения непрерывности стационарного тока). Рекомендуется сделать чертеж.