При исследовании решения перейдите к случаю поля в центре кольцевого тока ($d=0$).

Сопоставьте полученное выражение для напряженности при больших d с формулой напряженности поля электрического диполя в точках, расположенных на продолжении оси диполя (упр. 1).

27. Найдите силу взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных и одинаково направленных линейных токов I_1 и I_2 (рис. 51), находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга (в расчете на 1 м длины).

Указание. Используйте полученное в упражнении 25 выражение для поля бесконечно длинного прямолинейного тока и формулу (24.10) для амперовой силы, учтя, что напряженность поля H_1 тока I_1 во всех точках проводника с током I_2 одинакова и что $\angle(\vec{l_2}, \vec{H_1})=\frac{\pi}{2}$.

При исследовании решения произведите подстановки $I_1=I_2=1$А, $r=1$ м, $l_2=1$ м и сопоставьте результат с определением ампера. Тем самым можно убедиться в правильности указанных выше численных значений коэффициентов пропорциональности в законах Ампера и Био—Савара—Лапласа: $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м, $k=\frac{1}{4\pi}$.

§ 26. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ (I УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА)

Метод вычисления напряженности магнитного поля тока на основе закона Био—Савара—Лапласа не является единственным. Ниже будут рассмотрены и другие методы решения этой задачи, позволяющие выявить важные особенности магнитного поля токов.

Пусть I — ток в длинном прямом проводнике (рис. 52). Рассмотрим циркуляцию вектора $\vec{H}$ по силовой линии L — окружности радиусом R. Проекция H_l на касательную к силовой линии в какой-либо точке равна, очевидно, численному значению напряженности, определяемой (см. упр. 25) при достаточно длинном проводнике выражением $\frac{I}{2\pi R}$. Поэтому циркуляция $\vec{H}$ равна:

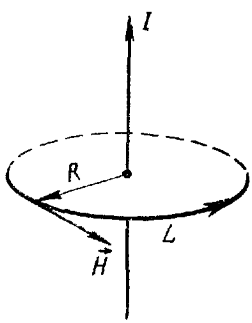

Рис 52

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \oint_L H_l dl = \frac{I}{2\pi R}\oint_L dl = I. \qquad (26.1)$$

Отсюда вытекает, что циркуляция $\vec{H}$ не зависит от радиуса силовой линии. Можно показать, что она не зависит ни от формы контура обхода, ни от формы проводника с током. Если использовать из классической магнетостатики определение напряженности магнитного поля как величины, численно равной силе, с которой поле действует на единичный магнитный полюс, то циркуляцию $\vec{H}$ можно трактовать как работу перемещения единичного полюса по замкнутому пути (здесь просматривается некоторое сходство с циркуляцией вектора $\vec{E}$).

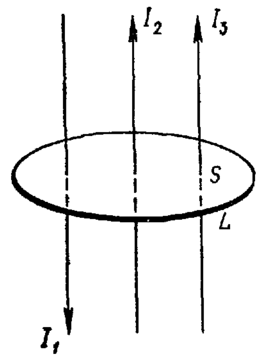

Рис 53

По аналогии с электрической цепью, где циркуляция электрического вектора представляет собой работу перемещения единичного заряда вдоль замкнутой цепи и называется электродвижущей силой, принято называть циркуляцию магнитного вектора $\vec{H}$ магнитодвижущей силой $\mathscr{E}_m$. Поэтому формулу (26.1) можно переписать:

$$\mathscr{E}_m = \oint_L \vec{H}d\vec{l} = I. \qquad (26.2)$$

Пусть через поверхность S, ограниченную контуром L (рис. 53), проходит несколько токов I_1, I_2, ... В силу указанных выше свойств циркуляции вектора $\vec{H}$ выражение (26.2) может быть обобщено:

$$\mathscr{E}_m = \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \Sigma I, \qquad (26.3)$$

где ΣI — алгебраическая сумма токов, пронизывающих поверхность S. Последнее выражение часто называют законом полного тока. Для частного случая, когда через данную поверхность протекают n токов, одинаковых по величине и направлению, имеем:

$$\mathscr{E}_m = \oint_L \vec{H}d\vec{l} = In. \qquad (26.4)$$

В выражениях (26.1—4) имеются в виду линейные токи; очевидно, в общем случае закон полного тока можно обобщить и на случай объемного тока, проведя замену $\Sigma I = \int_S j_n dS$:

$$\oint_L H_l dl = \int_S j_n dS. \qquad (26.5)$$

Отсюда вытекает принципиальное различие между электростатическим полем и стационарным магнитным полем: в первом случае циркуляция электрического вектора равна нулю, здесь же циркуляция может быть отлична от нуля (в случае, если контур обхода охватывает токи любого вида). Закон полного тока широко используется для вычисления напряженности магнитного поля токов.

Преобразуем левую часть выражения (26.5) в соответствии с теоремой Стокса:

$$\int_S \mathrm{rot}_n \vec{H} dS = \int_S j_n dS. \tag{26.6}$$

Выражение (26.6) имеет место при любых размерах и любой ориентации контуров в пространстве, иначе говоря, всегда имеет место равенство нормальных составляющих

$$\mathrm{rot}_n \vec{H} = j_n,$$

откуда вытекает равенство самих векторов:

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{j} \tag{26.7}$$

дифференциальное уравнение магнитного поля постоянных токов. Его другое название — I уравнение Максвелла* для магнитного поля постоянных токов.

Уравнения (26.5) и (26.7) выражают фундаментальное свойство магнитного поля токов, его вихревой характер. Векторные поля в общем случае определяются источниками и вихрями. В то время как электростатическое поле (поле вектора $\vec{E}$) обусловлено источниками, стационарное магнитное поле обусловлено токами, магнитное поле токов определяется вихрями. Как видно из выражения (26.7), вектор объемной плотности тока равен ротору (вихрю) вектора $\vec{H}$. Модельно можно представить себе $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$ как вектор, который вызывает вокруг себя завихрение магнитного поля в виде элементарно малых замкнутых силовых линий. Как известно, поле какого-либо вектора считают вихревым, если в нем существуют две такие бесконечно близкие точки, в которых векторы поля имеют прямо противоположные направления. Приближаясь с противоположных сторон к вектору $\vec{j}$, мы в пределе переходим к точкам, в которых кривизна линий вектора $\vec{H}$ становится бесконечно большой. Следовательно, здесь можно найти такие две бесконечно близкие точки (справа или слева от точки с вектором $\vec{j}$), в которых напряженность имеет противоположные направления. Линии магнитного поля тока представляют собой замкнутые линии, они не имеют ни начала, ни конца, иначе говоря, у них нет источников. Математически это выражают уравнением

$$\mathrm{div}\, \vec{H} = 0, \tag{26.8}$$

---

* Применяемая здесь и далее «нумерация» уравнений Максвелла получила широкое распространение, главным образом в учебной литературе, однако она не является общепринятой.

строгое обоснование которого будет дано ниже. Существенно, что уравнение (26.8) справедливо только в том случае, если поле токов заполнено однородным магнетиком.

Таким образом, для стационарного магнитного поля токов в однородной среде справедлива система уравнений:

в дифференциальной форме в интегральной форме

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H}&=\vec{j}, & \oint_L \vec{H}d\vec{l}&=\int_S j_n dS,\\ \operatorname{div}\vec{H}&=0, & \int_V \operatorname{div}\vec{H}dV&=\int_S H_n dS=0. \end{aligned}\right| \qquad (26{,}9)$$

Отметим одну важную особенность: в дифференциальном уравнении (26.7) рассматриваются ток и его поле в одном и том же физически бесконечно малом объеме, в одной точке пространства.

§ 27. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОТСУТСТВИИ МАГНЕТИКОВ

Вычисление напряженности электростатического поля, как было показано выше, существенно облегчается введением потенциала φ и использованием его связи с напряженностью $\vec{E}$:

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Аналогичная зависимость скалярного магнитного потенциала φ_m от напряженности $\operatorname{grad}\varphi_m=-\vec{H}$ беспредметна, поскольку такая зависимость предполагает наличие потенциальных полей, а следовательно, источников поля (магнитных зарядов).

Для вычисления напряженности магнитного поля токов вводят векторный потенциал. С этой целью преобразуем подынтегральное выражение одной из формул закона Био—Савара—Лапласа, например (25.3). Учитывая равенство $\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ (§ 11), преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}=-\left[\vec{j}\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}\right].$$

Индекс a означает, что точку истока мы считаем неподвижной, а точку наблюдения — подвижной. Используя известную формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a})=[\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{a}]+\varphi\operatorname{rot}\vec{a}$$