строгое обоснование которого будет дано ниже. Существенно, что уравнение (26.8) справедливо только в том случае, если поле токов заполнено однородным магнетиком.

Таким образом, для стационарного магнитного поля токов в однородной среде справедлива система уравнений:

в дифференциальной форме в интегральной форме

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\vec{H}=\vec{j}, & \oint\limits_L \vec{H}d\vec{l}=\int\limits_S j_n dS, \\ \operatorname{div}\vec{H}=0, & \int\limits_V \operatorname{div}\vec{H}dV=\int\limits_S H_n dS=0. \end{array}\right| \qquad (26{,}9)$$

Отметим одну важную особенность: в дифференциальном уравнении (26.7) рассматриваются ток и его поле в одном и том же физически бесконечно малом объеме, в одной точке пространства.

§ 27. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОТСУТСТВИИ МАГНЕТИКОВ

Вычисление напряженности электростатического поля, как было показано выше, существенно облегчается введением потенциала φ и использованием его связи с напряженностью $\vec{E}$:

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Аналогичная зависимость скалярного магнитного потенциала φ_m от напряженности $\operatorname{grad}\varphi_m=-\vec{H}$ беспредметна, поскольку такая зависимость предполагает наличие потенциальных полей, а следовательно, источников поля (магнитных зарядов).

Для вычисления напряженности магнитного поля токов вводят векторный потенциал. С этой целью преобразуем подынтегральное выражение одной из формул закона Био—Савара—Лапласа, например (25.3). Учитывая равенство $\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ (§ 11), преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}=-\left[\vec{j}\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}\right].$$

Индекс a означает, что точку истока мы считаем неподвижной, а точку наблюдения — подвижной. Используя известную формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a})=[\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{a}]+\varphi\operatorname{rot}\vec{a}$$

и полагая $\varphi=\frac{1}{r}$, $\vec{a}=\vec{j}$, получим:

$$\operatorname{rot}_a\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)=\left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{j}\right]+\frac{1}{r}\operatorname{rot}_a\vec{j}.$$

Поскольку значение вектора $\vec{j}$ в элементе dV не зависит от перемещения точки наблюдения, то $\operatorname{rot}_a\vec{j}=0$, в чем легко убедиться при записи составляющих ротора. Действительно, используя обычные обозначения для координат точек истока и наблюдения, имеем для составляющих ротора по оси x:

$$(\operatorname{rot}_a\vec{j})_x=\frac{\partial j_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial y}-\frac{\partial j_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial z}=0 \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}_a\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)=\left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}\right]=\left[\frac{\vec{j}\vec{r}}{r^3}\right]. \tag{27.1}$$

Учитывая это равенство, преобразуем выражение (25.3) к виду

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\operatorname{rot}_a\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)dV. \tag{27.2}$$

Поскольку дифференцирование при вычислении ротора производится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по объему проводника с током, можно изменить последовательность операций:

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{j}}{r}dV\right). \tag{27.3}$$

Если ввести обозначение

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{j}}{r}dV, \tag{27.4}$$

то уравнение (27.3) принимает вид

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A}. \tag{27.5}$$

Здесь, как и в дальнейшем, индекс при символе ротора опускается, поскольку A всегда является функцией координат точки наблюдения.

Таким образом, напряженность поля может быть представлена в виде ротора некоторого вектора $\vec{A}$, называемого векторным потенциалом или вектор-потенциалом магнитного поля. В отличие от скалярного потенциала φ, который вводится на основе энергетических соотношений, векторный потенциал вводится формально-математическим определением (27.4).

Аналогично (27.4) пишут выражения для векторных потенциалов при поверхностном и линейном распределениях токов:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S \frac{\vec{i}}{r}\,dS, \qquad (27.6)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_l \frac{I\,d\vec{l}}{r}. \qquad (27.7)$$

Каждому из интегралов (27.4, 6, 7) соответствуют три скалярных составляющих вида

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{j_x}{r}\,dV.$$

Сопоставление выражений для векторного потенциала (27.4, 6, 7) с выражениями для напряженностей (25.3, 7) показывает, что первые выражения проще вторых. Поэтому вычисление напряженности поля токов предпочитают выполнять следующим образом: сначала вычисляют векторный потенциал, от которого потом переходят к напряженности, используя (27.5). Последняя операция легковыполнима (дифференцирование!).

О направлении векторного потенциала можно судить по записи его элемента:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\,dV}{r},$$

т. е. вектор-потенциал параллелен току. Примем без доказательства, что вектор-потенциал при условии конечности объема тел, обтекаемых током, всюду конечен, непрерывен и в бесконечности обращается в нуль (и при различных значениях относительной проницаемости μ). Из векторного исчисления известно, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, где $\vec{a}$ — произвольный вектор; следовательно,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{div}(\mu_0\vec{H}) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

Таким образом, мы вернулись к выражению (27.3), физический смысл которого уже был выяснен.

Напоминаем, что все приведенные выше формулы записаны для поля в вакууме ($\mu = 1$).

§ 28. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА — ЛАПЛАСА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОТСУТСТВИИ МАГНЕТИКОВ

Иногда задачи по нахождению векторного потенциала решаются проще, если исходить из дифференциального уравнения Пуассона — Лапласа. Выведем его, используя определение векторного