Аналогично (27.4) пишут выражения для векторных потенциалов при поверхностном и линейном распределениях токов:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_S \frac{\vec{i}}{r} dS, \tag{27.6}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_l \frac{I\, d\vec{l}}{r}. \tag{27.7}$$

Каждому из интегралов (27.4, 6, 7) соответствуют три скалярных составляющих вида

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{j_x}{r} dV.$$

Сопоставление выражений для векторного потенциала (27.4, 6, 7) с выражениями для напряженностей (25.3, 7) показывает, что первые выражения проще вторых. Поэтому вычисление напряженности поля токов предпочитают выполнять следующим образом: сначала вычисляют векторный потенциал, от которого потом переходят к напряженности, используя (27.5). Последняя операция легковыполнима (дифференцирование!).

О направлении векторного потенциала можно судить по записи его элемента:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}\, dV}{r},$$

т. е. вектор-потенциал параллелен току. Примем без доказательства, что вектор-потенциал при условии конечности объема тел, обтекаемых током, всюду конечен, непрерывен и в бесконечности обращается в нуль (и при различных значениях относительной проницаемости μ). Из векторного исчисления известно, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$, где $\vec{a}$ — произвольный вектор; следовательно,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{div} (\mu_0 \vec{H}) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Таким образом, мы вернулись к выражению (27.3), физический смысл которого уже был выяснен.

Напоминаем, что все приведенные выше формулы записаны для поля в вакууме ($\mu = 1$).

§ 28. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА — ЛАПЛАСА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОТСУТСТВИИ МАГНЕТИКОВ

Иногда задачи по нахождению векторного потенциала решаются проще, если исходить из дифференциального уравнения Пуассона — Лапласа. Выведем его, используя определение векторного потенциала (27.5) и дифференциальное уравнение поля постоянных токов (26.7). После подстановки этих уравнений имеем:

$$\mathrm{rot\,rot}\,\vec{A}=\mu_0\vec{j}. \tag{28.1}$$

Используем формулу векторного анализа

$$\mathrm{rot\,rot}\,\vec{A}=\mathrm{grad\,div}\,\vec{A}-\Delta\vec{A}, \tag{28.2}$$

где $\Delta\vec{A}=\vec{i}\,\Delta A_x+\vec{j}\,\Delta A_y+\vec{k}\,\Delta A_z$.

Без каких-либо ограничений можно допустить, что в поле постоянных токов (см. § 43)

$$\mathrm{div}\,\vec{A}=0, \tag{28.3}$$

откуда

$$\mathrm{grad\,div}\,\vec{A}=0.$$

Исходя из выражений (28.2—3), переписываем уравнение (28.1):

$$\Delta\vec{A}=-\mu_0\vec{j}. \tag{28.4}$$

Мы получили дифференциальное уравнение для векторного потенциала; в данной форме оно выполняется в точках с токами и называется уравнением Пуассона. В точках без тока оно приобретает вид

$$\Delta\vec{A}=0$$

(уравнение Лапласа). Запоминание записанной выше системы уравнений стационарного магнитного поля облегчается сопоставлением с соответствующей системой уравнений электростатического поля, так как в их построении отчетливо просматривается некоторая аналогия:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho\vec{r}}{r^3}dV,\quad \vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\frac{[\vec{j}\,\vec{r}]}{r^3}dV, \tag{28.5}$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho}{r}dV,\qquad \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{j}}{r}dV, \tag{28.6}$$

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},\qquad \Delta\vec{A}=-\mu_0\vec{j}, \tag{28.7}$$

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi,\qquad \vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{A}. \tag{28.8}$$

Уравнения электростатического поля (28.5)—(28.7) записаны для случая однородной среды; в случае вакуума относительная проницаемость выпадает из знаменателя. Уравнение магнитного поля (28.5) записано для однородной среды, уравнения (28.6) и (28.7)—для вакуума.

Упражнения

28. Найдите напряженность поля длинного соленоида с числом витков n, по которым течет ток I (рис. 54), используя закон полного тока (26.4).

Указание. При достаточно большой относительной длине соленоида $\frac{l}{D}$ (где D — диаметр) можно пренебречь тем вкладом, который вносит в значение циркуляции интеграл по внешней части контура обхода NaS.

Обратите внимание на две особенности: 1) напряженность поля внутри соленоида определяется числом ампер-витков на единицу длины; 2) поле внутри длинного соленоида практически однородно.

29. Найдите напряженность поля тока, текущего по бесконечно длинному прямому цилиндру радиуса a в направлении образующей при $\vec{j} = \text{const}$ (рис. 55), исходя из закона полного тока (26.4).

При исследовании решения обратите внимание на следующие особенности: 1) наличие магнитного поля как во внешнем пространстве (выражающемся через вектор-потенциал A_e), так и внутри проводника с током (A_i). Эта часть поля выпадает из рассмотрения, если ток считать линейным; 2) поле объемного тока в бесконечно длинном прямом цилиндре во внешнем пространстве выражается так же, как и поле линейного тока при условии, что $I = \pi a^2 j$.

Постройте график $H = f(r)$.

30. Найдите векторный потенциал $\vec{A}$ прямолинейного бесконечно длинного тока и по $\vec{A}$ вычислите $\vec{H}$ (рис. 56).

Указание. Направьте вдоль тока ось z, поскольку векторный

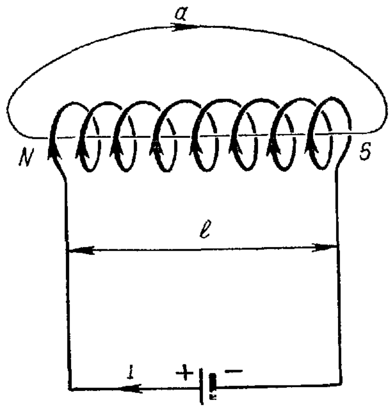

Рис. 54

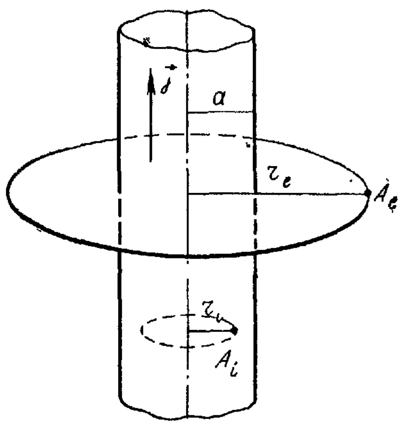

Рис. 55

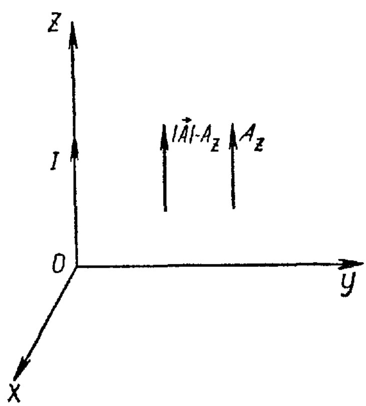

Рис. 56

потенциал параллелен току, то $A = A_z$. Используйте аналогию в выражениях для скалярного и векторного потенциала (§ 9 и 27): $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{kdl}{r}$, $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,dz}{r}$, где k — линейная плотность зарядов. Для потенциала электрического поля бесконечно длинной заряженной прямой линии была выведена формула (см. упр. 14): $\varphi = \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}$. Аналогично запишите A_z и затем по A_z найдите H.

При исследовании решения обратите внимание на возможность простого графического отображения вектора-потенциала в случае линейных токов: $A_z = C\ln\frac{1}{r}$, где C — коэффициент пропорциональности.

§ 29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ОДНОРОДНЫХ МАГНЕТИКАХ. ВЕКТОР МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{B}$

В предыдущих параграфах рассматривалось магнитное поле токов в отсутствии магнетиков, т. е. в вакууме ($\mu = 1$). Для подавляющего большинства веществ значение относительной магнитной проницаемости μ очень мало отличается от единицы, поэтому полученные выше закономерности в первом приближении справедливы и для магнитного поля тока в таких веществах. Когда же в поле тока вносятся ферромагнетики, то их влиянием уже пренебречь нельзя.

В данной главе рассматривается только магнитное поле постоянных токов, которые, как известно, всегда являются замкнутыми. Это означает, что рассмотренные выше магнитные поля обусловлены токами в макроскопических контурах, т. е. макроскопическими токами, иначе, токами проводимости.

Вспомним известные из курса общей физики основные положения о магнитном поле замкнутого линейного тока*: его магнитные свойства характеризуются магнитным моментом $\vec{p}_m$:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \tag{29.1}$$

где I — линейный ток плоского контура, S — площадь, охватываемая контуром, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали из центра этой площади; направление $\vec{n}$ связано с направлением тока правилом буравчика (рис. 57).

Ампер впервые высказал гениальное предположение, что элементарными носителями магнитных свойств вещества являются

---

* Их вывод повторяется в конце этого параграфа в связи с изложением основ магнетизма в школьном курсе физики.