потенциал параллелен току, то $A = A_z$. Используйте аналогию в выражениях для скалярного и векторного потенциала (§ 9 и 27): $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{kdl}{r}$, $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,dz}{r}$, где k — линейная плотность зарядов. Для потенциала электрического поля бесконечно длинной заряженной прямой линии была выведена формула (см. упр. 14): $\varphi = \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}$. Аналогично запишите A_z и затем по A_z найдите H.

При исследовании решения обратите внимание на возможность простого графического отображения вектора-потенциала в случае линейных токов: $A_z = C\ln\frac{1}{r}$, где C — коэффициент пропорциональности.

§ 29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ОДНОРОДНЫХ МАГНЕТИКАХ. ВЕКТОР МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{B}$

В предыдущих параграфах рассматривалось магнитное поле токов в отсутствии магнетиков, т. е. в вакууме ($\mu = 1$). Для подавляющего большинства веществ значение относительной магнитной проницаемости μ очень мало отличается от единицы, поэтому полученные выше закономерности в первом приближении справедливы и для магнитного поля тока в таких веществах. Когда же в поле тока вносятся ферромагнетики, то их влиянием уже пренебречь нельзя.

В данной главе рассматривается только магнитное поле постоянных токов, которые, как известно, всегда являются замкнутыми. Это означает, что рассмотренные выше магнитные поля обусловлены токами в макроскопических контурах, т. е. макроскопическими токами, иначе, токами проводимости.

Вспомним известные из курса общей физики основные положения о магнитном поле замкнутого линейного тока*: его магнитные свойства характеризуются магнитным моментом $\vec{p}_m$:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \tag{29.1}$$

где I — линейный ток плоского контура, S — площадь, охватываемая контуром, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали из центра этой площади; направление $\vec{n}$ связано с направлением тока правилом буравчика (рис. 57).

Ампер впервые высказал гениальное предположение, что элементарными носителями магнитных свойств вещества являются

* Их вывод повторяется в конце этого параграфа в связи с изложением основ магнетизма в школьном курсе физики.

внутримолекулярные токи. С современной точки зрения элементарными носителями магнитных свойств вещества являются орбитальный и спиновый (или собственный) магнитные моменты внутриатомного электрона — $\vec{p}_{ml}$ и $\vec{p}_{ms}$. Результирующий магнитный момент атома

$$\vec{p}_{ma} = \Sigma (\vec{p}_{ml} + \vec{p}_{ms}) \qquad (29.2)$$

является геометрической суммой магнитных моментов всех электронов атома (если не учитывать намного меньшего магнитного момента ядра). Сопоставляемый результирующему магнитному моменту атома (или молекулы) ток и является амперовым молекулярным током. В школьных руководствах по физике эти молекулярные токи всегда изображаются в виде «колец», плоскости которых ориентируются перпендикулярно полю.

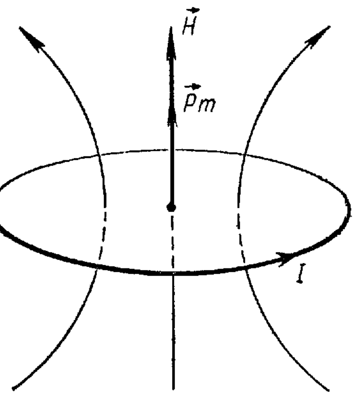

Рис. 57

Магнитное поле, обусловленное магнитным моментом на расстояниях r, намного превышающих линейные размеры контура, может быть вычислено так же, как поле электрического диполя (§ 11).

От магнитного момента замкнутого тока (как макро-, так и микроскопического) зависит и момент силы, действующий на магнитный момент во внешнем магнитном поле; соответствующее выражение для момента силы

$$\vec{K} = [\vec{p}_m \mu_0 \vec{H}] \qquad (29.3)$$

аналогично выражению для момента сил, действующих на электрический дипольный момент во внешнем электрическом поле (§ 11). По аналогии с электростатикой можно также записать энергию магнитного момента во внешнем однородном поле (ср. упр. 18).

Пусть в поле тока, например протекающего через соленоид, внесен магнетик. Под действием поля происходит его намагничивание, механизм которого состоит в ориентации микроскопических магнитных моментов в направлении поля. Магнитное состояние вещества принято характеризовать вектором намагниченности — геометрической суммой магнитных моментов атомов (или молекул), находящихся в единице объема:

$$\vec{J} = \Sigma \vec{p}_{ma}, \qquad (29.4)$$

где $\vec{J}$ — магнитный аналог вектора поляризации $\vec{P}$.

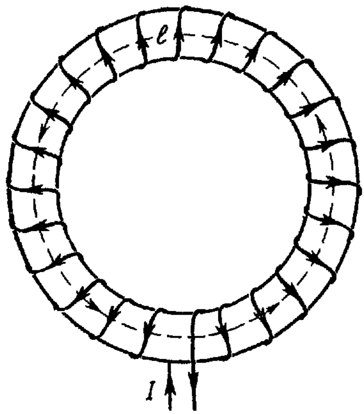

Рис. 58

Как уже отмечалось выше, напряженность поля токов $\vec{H}$ не изменяется, если все поле заполнить каким угодно однородным магнетиком. Это важное положение получило свое математическое выражение в том, что в формулу закона Био—Савара—Лапласа не входит относительная магнитная проницаемость μ. Это следует из условия, что поле вектора $\vec{H}$ обусловлено только макроскопическими токами (токами проводимости); при этом сохраняется оговорка о том, что магнитное поле локализовано в вакууме или в однородном магнетике.

Случай однородного магнетика, заполняющего все поле тока проводимости, легко осуществляется при помощи тора, на котором имеется плотная обмотка с током (рис. 58); в этом случае формула напряженности поля соленоида (см. упр. 28) $H=\frac{In}{l}$ (где l—средняя длина тора) является точной. Поле тороида практически однородно и локализовано в конечном объеме тора (если не считать небольших магнитных потоков, выходящих из тора в окружающее пространство). Это поле обусловлено, как уже указывалось, макроскопическими токами в проводах обмотки. На поле $\vec{H}_0$ этих токов (первичное поле) при наличии сердечника накладывается добавочное (вторичное) поле $\vec{H}'$ упорядоченных молекулярных токов. Геометрическая сумма $\vec{H}_0$ и $\vec{H}'$ в гауссовой системе единиц была определена как вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$:

$$\vec{B}=\vec{H}_0+\vec{H}'. \tag{29.5}$$

Таким образом, в гауссовой системе единиц векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ имеют одинаковую размерность, а связывающая векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}_0$ относительная магнитная проницаемость μ является безразмерной величиной:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}_0 \tag{29.6}$$

Единица магнитной индукции—гаусс; в точке, где $H_0=1$ Э, индукция равна μ Гс.

В СИ связь между векторами $\vec{B}$, $\vec{H}_0$ и $\vec{H}'$ иная:

$$\vec{H}_0 + \vec{H}' = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \tag{29.7}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}_0, \tag{29.8}$$

в вакууме

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}_0$$

(в дальнейшем индекс у H_0 будет опущен, так как под величиной H подразумевается поле макроскопических токов). Здесь, как уже указывалось раньше, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (генри на метр), μ — относительная магнитная проницаемость (безразмерная величина, одинаковая в обеих системах), B измеряется в теслах (Тл), H — в амперах на метр (А/м), 1 Тл $= 10^4$ Гс. В точке, где $H = 1$ А/м, индукция B равна $\mu\mu_0$ Тл.

Итак, поле вектора $\vec{H}$ обусловлено токами проводимости, характеризующимися объемной плотностью $\vec{j}$ и поверхностной плотностью $\vec{i}$, поле вектора $\vec{H}'$ — токами связанных зарядов в атомах и молекулах («молекулярными токами»), которые характеризуются объемной плотностью $\vec{j}_{мол}$ и поверхностной плотностью $\vec{i}_{мол}$, а поле вектора $\vec{B}$ — и теми и другими. Соответственно вводятся векторные потенциалы: $\vec{A}_0$ — вектор-потенциал поля в отсутствии магнетиков, т. е. поля, обусловленного токами свободных зарядов (токами проводимости); $\vec{A}'$ — вектор-потенциал поля, обусловленного упорядоченными молекулярными токами; $\vec{A}$ — вектор-потенциал поля, обусловленного и теми и другими токами, причем

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}'. \tag{29.9}$$

В формулах § 27 имелось в виду поле в вакууме, вектор-потенциал которого сейчас обозначен через $\vec{A}_0$; для него было записано [см. (27.4) и (27.6)]:

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}}{r}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S \frac{\vec{i}}{r}\,dS, \tag{29.10}$$

где $\vec{j}$ и $\vec{i}$ — объемная и поверхностная плотности токов проводимости. Аналогично записываются выражения для $\vec{A}'$, обусловленного молекулярными токами плотностью $\vec{j}_{мол}$ и $\vec{i}_{мол}$:

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}_{мол}}{r}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S \frac{\vec{i}_{мол}}{r}\,dS, \tag{29.11}$$

и для векторного потенциала $\vec{A}$ результирующего поля:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{(\vec{j}+\vec{j}_{\text{мол}})}{r}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S \frac{(\vec{i}+\vec{i}_{\text{мол}})}{r}\,dS. \qquad (29.12)$$

Учитывая новое обозначение вектор-потенциала поля токов проводимости ($\vec{A}_0$), перепишем выражение (27.5) в виде

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}_0,$$

соответственно

$$\vec{H}' = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}'.$$

Используя уравнение (29.8), получим:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{H}') = \mathrm{rot}\,\vec{A}_0 + \mathrm{rot}\,\vec{A}' = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \qquad (29.13)$$

где вклад молекулярных токов учитывается через $\vec{H}'$ (а не через μ).

Исходя из дифференциального уравнения поля токов, мы получили дифференциальные уравнения для потенциала (28.4), положив $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$. Соответственно

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}_0 = -\frac{1}{\mu_0}\,\Delta\vec{A}_0 = \vec{j};\ \ \Delta A_0 = -\mu_0\vec{j};$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}' = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}' = -\frac{1}{\mu_0}\,\Delta\vec{A}' = \vec{j}_{\text{мол}};\ \ \Delta\vec{A}' = -\mu_0\vec{j}_{\text{мол}}.$$

Используя выражения (29.8) и (29.13), имеем:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \mu_0(\vec{j}+\vec{j}_{\text{мол}}) = \mu\mu_0\vec{j}, \qquad (29.14)$$

т. е.

$$\Delta\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j}. \qquad (29.15)$$

Выше уже указывалось на некоторое сходство векторов $\vec{D}$ и $\vec{H}$; поле вектора $\vec{D}$ обусловлено свободными зарядами, поле вектора $\vec{H}$—движением свободных зарядов. Сейчас выясняется аналогия между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$: поле вектора $\vec{E}$ обусловлено как свободными, так и связанными зарядами; поле вектора $\vec{B}$—движением как свободных, так и связанных зарядов. В выборе названий векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$ таким образом налицо некоторое несоответствие, обусловленное историческим развитием учения о магнетизме. Следовало бы назвать вектор $\vec{B}$ как более полный, общий вектор—напряженностью, а вектор $\vec{H}$—индукцией.

Уравнение (29.14) принадлежит к основным уравнениям стационарных магнитных полей в магнетиках: поле вектора $\vec{B}$ определяется вихрями, которые локализованы в объемах, где протекают токи $\vec{j}$ и $\vec{j}_{\text{мол}}$. Примечательно, что поле вектора $\vec{B}$ определяется только вихрями, оно не имеет источников (ими должны были быть «магнитные заряды», которые в природе не обнаружены). Эта особенность вектора $\vec{B}$ математически отражена в равенстве нулю дивергенции $\vec{B}$:

$$\operatorname{div}\vec{B}=0. \tag{29.16}$$

Перейдем к интегральной форме уравнений (29.14) и (29.16):

$$\int\limits_S \operatorname{rot}_n \vec{B}\,dS=\oint\limits_L B_l\,dl=\mu_0\int\limits_S (j_n+j_{n,\,\text{мол}})\,dS, \tag{29.17}$$

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{B}\,dV=\oint\limits_S B_n\,dS=0. \tag{29.18}$$

В уравнении (29.18) фигурирует важная величина—поток магнитной индукции через замкнутую поверхность. Линии индукции, не имея источников, замкнуты сами на себя *. Поток индукции через поверхность S

$$\int\limits_S B_n\,dS\equiv\int\limits_S \vec{B}\,d\vec{S}=\Phi \tag{29.19}$$

в электротехнических приложениях выражается в веберах (Вб): 1 Вб = 1 Тл · 1 м^2.

В гауссовой системе единиц поток магнитной индукции измеряется в максвеллах (Мкс): 1 Мкс = 1 Гс · 1 см^2.

Используя соотношение 1 Тл = 10^4 Гс, находим связь между единицами магнитного потока в СИ и СГС:

$$1\ \text{Вб}=10^4\ \text{Гс}\cdot 10^4\ \text{см}^2=10^8\ \text{Мкс}.$$

Отметим в заключение, что силы, с которыми магнитное поле действует на провод с током в однородной магнитной среде, определяются вектором $\vec{B}$. В силу этого закон Ампера в магнетике записывается для линейных токов (24.2) в виде:

$$d\vec{F}=\mu\mu_0 I\,[d\vec{l}\,\vec{H}]=I\,[d\vec{l}\,\vec{B}],$$

а для объемных токов:

$$d\vec{F}=\mu\mu_0[\vec{j}\vec{H}]\,dV=[\vec{j}\vec{B}]\,dV. \tag{29 20}$$

* Вместе с тем линии индукции могут идти из бесконечности и уходить в бесконечность; возможен и третий, весьма сложный случай, когда линии индукции не замкнуты, но не имеют ни начала, ни конца и не идут из бесконечности в бесконечность, В данной книге этот случай не рассматривается

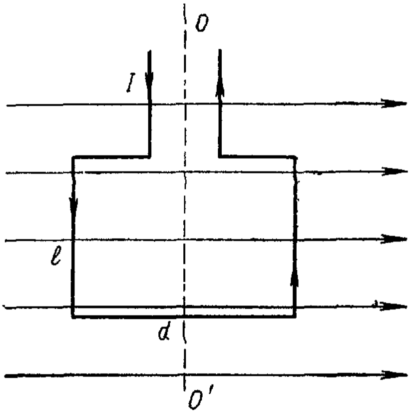

Рис 59

В курсе физики средней школы, как уже указывалось в § 24, при исследовании магнитного поля в качестве пробного тела используют элементарно малую прямоугольную рамку, обтекаемую постоянным током. Из характеристик магнитного поля вводится только вектор магнитной индукции $\vec{B}$ Предпочтение, отдаваемое рамке, вполне оправдано: рамка является. моделью якоря (ротора) как в генераторе, так и в электродвигателе.

Выведем выражение для максимального вращающего момента, действующего на рамку с током I в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$.

Момент действующих на рамку сил стремится повернуть ее так, чтобы рамка расположилась перпендикулярно направлению вектора $\vec{B}$, поэтому момент будет максимальным, когда поток через рамку равен нулю (рис. 59). Обозначения сторон рамки указаны на рисунке. Амперова сила, действующая на каждую из двух сторон рамки длиной l в положении, изображенном на рисунке, численно равна: $F=IlB$. Отсюда для вращающего момента (максимального) получаем:

$$K_{\max}=Fd=IlBd=BIS,$$

где S — площадь рамки.

В курсе физики средней школы эта формула используется для определения индукции B и ее единицы — тесла (Тл):

$$B=\frac{K_{\max}}{IS}. \tag{29.21}$$

Название произведения $IS=p_m$ — магнитного момента рамки — в школьном курсе не вводится. Формула (29.21) является, конечно, частным случаем введенного выше выражения (29 3).

§ 30. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МАГНЕТИКАХ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Резюмируем основные положения о стационарном магнитном поле в магнетиках. Поле вектора $\vec{H}$ определяется вихрями, которыми являются токи проводимости. Поле вектора $\vec{B}$ не имеет