

Если оба контура неподвижны, не деформируются и магнитные свойства среды неизменны, то $L_{12} = \text{const}$, и мы получим:

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (35.6)$$

Если же изменяется ток во втором контуре, то возбуждается ЭДС индукции в первом контуре.

На явлении взаимной индукции основано действие трансформатора. Железный магнитопровод трансформатора служит для увеличения индуктивной связи; благодаря ему через обе его обмотки проходит практически один и тот же магнитный поток.

Согласно уравнениям (34.3) и (35.1) магнитная энергия тока I_2 в поле тока I_1 равна:

$$W_{12} = -U_{12} = I_2 \Phi_{12} = L_{12} I_1 I_2. \quad (35.7)$$

Таким же образом выражается и магнитная энергия тока I_1 в поле тока I_2 :

$$W_{21} = -U_{21} = I_1 \Phi_{21} = L_{21} I_2 I_1.$$

Если токи I_1 и I_2 нельзя считать линейными, то необходимо ввести в рассмотрение объемные плотности токов \vec{j}_1 (в элементе объема dV_1 первого контура) и \vec{j}_2 (в элементе объема dV_2 второго контура). Согласно выражению (34.8)

$$W_{12} = -U_{12} = \int_{V_2} \vec{A}_1 \vec{j}_2 dV_2, \quad W_{21} = -U_{21} = \int_{V_1} \vec{A}_2 \vec{j}_1 dV_1. \quad (35.8)$$

Внося в эти уравнения выражения для векторных потенциалов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 поля токов \vec{j}_1 и \vec{j}_2

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{j}_1 dV_1}{r}, \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_2 dV_2}{r},$$

получим:

$$W_{12} = -U_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r} = -U_{21} = W_{21}. \quad (35.9)$$

§ 36. КОЭФФИЦИЕНТ САМОИНДУКЦИИ.

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОКОВ.

ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВ

При самоиндукции изменение тока и параметров контура приводит к изменению потока индукции сквозь свой же контур, вследствие чего в нем возбуждается ЭДС индукции. Обычно процесс начинается с изменения тока (при неизменных параметрах контура).

Пусть по замкнутому проводнику конечного сечения течет объемный ток I (рис. 66). Разбиваем его на отдельные нити тока dI_1, dI_2, \dots , длина которых l_1, l_2, \dots . Общий поток Φ_{11} складывается из элементарных потоков от одной нити тока сквозь контуры других нитей. Очевидно, $I = \sum dI$, и общий поток Φ_{11} , связанный с током I , пропорционален суммарному току:

$$\Phi_{11} = L_{11}I, \quad (36.1)$$

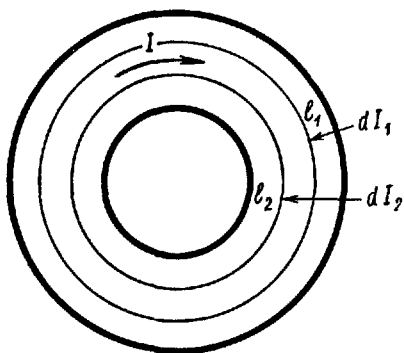


Рис. 66

где L_{11} — коэффициент самоиндукции (индуктивность) проводника, зависящий от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды.

Обозначая через δU потенциальную функцию нити тока dI , в соответствии с формулой (34.3) получим:

$$\delta U = -\Phi_{11} dI, \quad (36.2)$$

и, суммируя по всем нитям, приходим к выражению

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{1}{2} \sum \Phi_{11} dI = \frac{1}{2} I \Phi_{11} = \frac{1}{2} L_{11} I^2. \quad (36.3)$$

Перед знаком суммы появляется множитель $\frac{1}{2}$ в связи с тем, что взаимодействие каждой пары нитей тока учитывается в сумме дважды.

При более общем подходе разбивают объемный ток I на пары элементов $\vec{j}_1 dV_1$ и $\vec{j}_2 dV_2$, благодаря чему потенциальная функция тока может быть выражена через векторный потенциал объемных токов (34.8):

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{1}{2} \int_V \vec{A}_1 \vec{j}_1 dV_1, \quad (36.4)$$

где индекс «1» введен для определенности (появление множителя $\frac{1}{2}$ объяснено выше). Подставим сюда выражение для векторного потенциала \vec{A}_1 :

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_2 dV}{r},$$

где \vec{A}_1 учитывает воздействие на элемент $\vec{j}_1 dV_1$ всех «остальных» элементов тока $\vec{j}_2 dV_2$. Тогда уравнение для магнитной энергии тока I приобретает вид

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r}, \quad (36.5)$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем V с током I , т. е. должна быть взята сумма подинтегральных выражений для всех возможных попарных комбинаций элементов объема V ; r — расстояние между элементами dV_1 и dV_2 .

В соответствии с формулой (36.3) имеем:

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r} = \frac{1}{2} L_{11} I^2, \quad (36.6)$$

откуда вытекает выражение для индуктивности проводника:

$$L_{11} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi I^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r}. \quad (36.7)$$

Вычисление индуктивности связано обычно с большими трудностями, поэтому она в большинстве случаев определяется опытным путем.

Найдем индуктивность тороидального соленоида длиной l , для которого (см. упр. 28) формула для напряженности магнитного поля $H = \frac{In}{l}$ выполняется с большой точностью. Если поле заполнено веществом с проницаемостью μ , то для индукции B и ее потока Φ имеем:

$$B = \mu\mu_0 \frac{In}{l}, \quad \Phi = \mu\mu_0 \frac{In}{l} S,$$

где S — поперечное сечение тороида.

В случае соленоида (с n витками) в формулу (36.1) входит не поток, а новая величина — потокосцепление $n\Phi$ *:

$$n\Phi = L_{11} I. \quad (36.8)$$

Отсюда для индуктивности тороидального соленоида получаем:

$$L = \mu\mu_0 \frac{n^2 S}{l}.$$

При изменении потока Φ_{11} сквозь собственный контур в контуре возбуждается ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d}{dt} (L_{11} I) = -\left(L_{11} \frac{dI}{dt} + I \frac{dL_{11}}{dt} \right); \quad (36.9)$$

если $L_{11} = \text{const}$, то

$$\mathcal{E}_{11} = -L_{11} \frac{dI}{dt}.$$

* Потокосцепление $n\Phi$ — общее число «пересечений» витками линий индукции при полном исчезновении потока (например, при выключении тока).

Индуктивность в СИ измеряется в генри (1 Гн = 1 Вб/1 А), в системе СГС — в см; 1 Гн = 10⁹ см.

Полная потенциальная функция U двух токов равна сумме энергий их взаимодействия U_{12} ($=U_{21}$) и собственных потенциальных энергий U_{11} и U_{22} :

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right);$$

или, учитывая, что $L_{12} = L_{21}$:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\mu\mu_0}{8\pi} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2) = \\ &= -\frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum L_{ik} I_i I_k. \end{aligned} \quad (36.10)$$

Это выражение применимо и к системе произвольного числа токов, если распространить в нем суммирование на все возможные пары индексов i и k .

Полную потенциальную функцию системы токов можно выразить через плотность токов и векторный потенциал поля токов. Используя выражение [ср. (34.8) и (35.8)]

$$U_{12} = \frac{1}{2} (U_{12} + U_{21}) = -\frac{1}{2} \int_V \vec{A}_1 \vec{j}_2 dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{A}_2 \vec{j}_1 dV$$

и введя векторный потенциал результирующего поля обоих токов, получим

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{j} dV,$$

т. е.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{j} dV. \quad (36.11)$$

Последняя формула справедлива для любой системы токов. Выражая \vec{j} через $\text{rot } \vec{H}$, получим:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \text{rot } \vec{H} dV. \quad (36.12)$$

Используем, далее, формулу векторного анализа

$$\vec{A} \text{rot } \vec{H} = \vec{H} \text{rot } \vec{A} + \text{div} [\vec{H} \vec{A}]$$

и определение $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\vec{A} \text{rot } \vec{H} = \vec{H} \vec{B} + \text{div} [\vec{H} \vec{A}].$$

Внося это выражение под знак интеграла (36.12) и применив теорему Остроградского—Гаусса, получим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} [\vec{H} \vec{A}] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV + \frac{1}{2} \oint_S [\vec{H} \vec{A}]_n dS. \end{aligned} \quad (36.13)$$

При распространении интегрирования на весь объем поля токов надо учесть, что интеграл по граничной поверхности этого объема обращается в нуль. В самом деле, на больших расстояниях поверхность S растет как r^2 , а произведение $\vec{H} \vec{A}$ убывает намного быстрее (как $\frac{1}{r^3}$). В силу этого выражение для W приобретает вид

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV. \quad (36.14)$$

Последняя формула должна быть истолкована следующим образом: магнитная энергия локализована в поле и распределяется по его объему с плотностью

$$\omega_m = \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (36.15)$$

Необходимо учесть ограниченную применимость многих формул § 34—36 в том случае, если в поле имеются ферромагнетики (это относится прежде всего к случаю изменяющихся полей, так как тогда в ферромагнетиках нарушается условие постоянства магнитной проницаемости).

Упражнения

31. Сравните величину токов проводимости и смещения в среде с электропроводностью γ и относительной диэлектрической проницаемостью ϵ при частотах 50 и 1000 Гц.

Указание. Ток смещения в среде обусловлен переменным электрическим полем; исходите из случая синусоидально изменяющегося поля $E = E_0 \sin \omega t$, откуда мгновенное значение плотности тока проводимости j , обусловленное этим полем в данной среде (закон Ома):

$$j = \gamma E_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Плотность тока смещения $j_{\text{смещ}}$ находится на основе формулы (33.5):

$$j_{\text{смещ}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 E_0 \cos \omega t = \epsilon \epsilon_0 \omega E_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (2)$$

Как видно из выражений (1) и (2), j и $j_{\text{смещ}}$ сдвинуты по фазе на четверть периода, поэтому сравнение их значений для одного и того же

момента времени в данном случае лишено смысла. Поэтому сравниваем их амплитудные значения $j_0 = \gamma E_0$ и j_0 , смещ. $= \epsilon \epsilon_0 \omega E_0$.

Проведите сравнение для гранита с $\gamma \approx 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$; $\epsilon = 9$.

32. Найдите вращающий момент сил, действующих на рамку площадью S , обтекаемую током I , в однородном магнитном поле \vec{B} , если рамка может вращаться вокруг оси OO' , перпендикулярной полю (см. рис. 59).

У к а з а н и е. Исходите из выражения для потенциальной функции тока (35.3):

$$U = -I\Phi = -IBS \cos \theta.$$

При анализе задачи исследуйте оба положения равновесия рамки ($\theta = 0, \pi$).

33. Определите взаимную индуктивность L_{12} двух параллельных отрезков длиной l , расположенных на расстоянии h друг от друга и совпадающих с двумя сторонами прямоугольника (рис. 67), считая $\mu = 1$.

У к а з а н и е. Токи в этих отрезках не могут быть замкнутыми, поэтому в реальной задаче должен рассматриваться прямоугольник, образуемый двумя отрезками l и перпендикулярными к ним отрезками $x_1, x_2 = h$. Однако в интеграле (35.3) для замкнутого прямоугольника

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

все члены, относящиеся к взаимно перпендикулярным парам элементов $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ (т. е. на отрезках l и на перпендикулярных к ним отрезках $x_1, x_2 = h$), равны нулю.

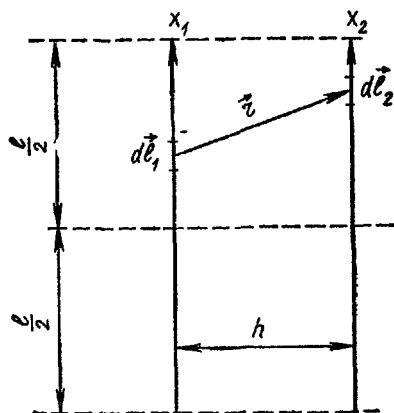


Рис. 67