V. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 37. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предыдущих параграфах были рассмотрены два уравнения Максвелла. Их фундаментальное значение определяется прежде всего тем, что они раскрывают глубокую взаимосвязь между электрическим и магнитным полями: изменение одного из них возбуждает другое. Таким образом было обосновано представление о едином электромагнитном поле. Установленные в результате обобщения многих закономерностей, эти уравнения явились отправной точкой большого числа дальнейших исследований и открытий, охвативших более широкий круг проблем, чем это предполагал сам Максвелл.

Роль уравнений Максвелла в теории и практических приложениях электромагнетизма сравнима с тем значением, которое имеют в механике законы Ньютона. Долгое время область применения уравнений Максвелла не выходила за пределы теоретической физики. В настоящее время эти уравнения стали рабочим аппаратом физиков и инженеров в ряде прикладных разделов, например в коротковолновой радиотехнике, электронике и др.

Два основных уравнения Максвелла совместно с некоторыми другими соотношениями составляют полную систему уравнений электромагнитного поля. Система называется полной потому, что электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени однозначно определяется этой системой, если только для некоторого начального момента времени заданы значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всех точках пространства.

Систему уравнений пишут в такой последовательности:

I уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

II уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

уравнения для дивергенций векторов индукции:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

уравнение непрерывности (закон сохранения электрического заряда):

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Нужно заметить, что с учетом закона сохранения заряда третье и четвертое уравнения являются следствиями двух первых. Несмотря на это, их принято включать в систему уравнений электромагнитного поля.

К основным уравнениям поля необходимо причислить еще так называемые материальные уравнения, связывающие между собой основные векторы электромагнитного поля:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Первое и второе уравнения Максвелла несимметричны; в первое уравнение входит ток проводимости $\vec{j}$, для которого нет аналога во втором уравнении, поскольку неизвестен «магнитный ток». Если, однако, перейти к полю в идеальном диэлектрике ($\gamma = 0$), то эти уравнения становятся симметричными:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned}\right| \qquad (37.1)$$

Наконец, если в диэлектрике $\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, то уравнения (37.1) можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned}\right| \qquad (37.2)$$

Для очень важного случая электромагнитного поля в вакууме (а в первом приближении и для поля в неионизованном воздухе) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned}\right| \qquad (37.3)$$

В этой записи уравнений особо отчетливо выступает связь между электрическим и магнитным полями: изменение во времени одного из них создает вихревое поле другого вектора.

Переходим к записи уравнений поля в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \int_S \vec{j}\,d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\,d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\,d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0,$$

$$\int_S \vec{D}\,d\vec{S} = \int_V \rho\,dV.$$

Отметим особо, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны между собой только в случае переменных полей. Если ограничиться случаем стационарных полей, т. е. считать векторы не зависящими от времени ($\vec{B} = \text{const}$, $\vec{D} = \text{const}$), то из уравнений поля выпадают $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и система дифференциальных уравнений поля распадается на две независимые системы:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array}\right\}$$ — система уравнений стационарного магнитного поля;

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{array}\right\}$$ — система уравнений электростатического поля.

Независимостью этих двух систем обусловлена возможность раздельного изучения электростатических и стационарных магнитных полей.

В гауссовой системе запись уравнений поля усложняется. Приводим эти уравнения в дифференциальной форме:

I уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

II уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

уравнения для дивергенций векторов индукции:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho;$$

уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t};$$

материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

§ 38. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ВЕКТОР УМОВА — ПОЙНТИНГА

При экспериментальном исследовании мы обнаруживаем электромагнитное поле по его силовым действиям, при которых энергия поля превращается в какие-либо другие формы энергии. Полная энергия электромагнитного поля является суммой электрической и магнитной энергий и согласно формулам (16.7) и (36.15) выражается формулой

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \varepsilon\varepsilon_0 E^2\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \mu\mu_0 H^2\,dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{D}\vec{E}\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{B}\vec{H}\,dV. \qquad (38\ 1)$$

Для плотности полной энергии электромагнитного поля имеем:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}). \qquad (38.2)$$

Электромагнитное поле может переносить электромагнитную энергию (поток энергии). Вычислим поток электромагнитной энергии в однородной среде, исходя из уравнений Максвелла § 37. Для этого умножим обе стороны I уравнения скалярно на $\vec{E}$, а обе стороны II уравнения — на $\vec{H}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \end{aligned}\right|\begin{aligned} &\cdot\vec{E} \\ &\cdot\vec{H} \end{aligned}$$

Запишем результаты умножения:

$$\begin{aligned} \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} &= -\mu\mu_0\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mu\mu_0}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mu_0 H^2), \\ \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2) + \vec{j}\vec{E}. \end{aligned} \qquad (38.3)$$

Преобразуем последнее слагаемое в соответствии с законом Ома:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}),$$