уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t};$$

материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

§ 38. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ВЕКТОР УМОВА — ПОЙНТИНГА

При экспериментальном исследовании мы обнаруживаем электромагнитное поле по его силовым действиям, при которых энергия поля превращается в какие-либо другие формы энергии. Полная энергия электромагнитного поля является суммой электрической и магнитной энергий и согласно формулам (16.7) и (36.15) выражается формулой

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\varepsilon_0 E^2 dV + \frac{1}{2}\int_V \mu\mu_0 H^2 dV = \\ = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E}\, dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}\, dV. \tag{38 1}$$

Для плотности полной энергии электромагнитного поля имеем:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}). \tag{38.2}$$

Электромагнитное поле может переносить электромагнитную энергию (поток энергии). Вычислим поток электромагнитной энергии в однородной среде, исходя из уравнений Максвелла § 37. Для этого умножим обе стороны I уравнения скалярно на $\vec{E}$, а обе стороны II уравнения — на $\vec{H}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot \vec{E} \\ &\cdot \vec{H} \end{aligned}$$

Запишем результаты умножения:

$$\begin{aligned} \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu\mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mu\mu_0}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mu_0 H^2), \\ \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2) + \vec{j}\vec{E}. \end{aligned} \tag{38.3}$$

Преобразуем последнее слагаемое в соответствии с законом Ома:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}),$$

откуда

$$\vec{E}=\frac{\vec{j}}{\gamma}-\vec{E}_{\text{стор}}$$

и

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\varepsilon_0E^2)+\frac{j^2}{\gamma}-\vec{j}\vec{E}_{\text{стор}}. \qquad (38.4)$$

Используем формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]=\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}-\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}$$

и соответственно вычтем из уравнения (38.3) выражение (38.4):

$$\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}-\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}=\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mu_0H^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\varepsilon_0E^2)-\frac{j^2}{\gamma}+\vec{j}\vec{E}_{\text{стор}}.$$

Перепишем это выражение:

$$\vec{j}\vec{E}_{\text{стор}}=\frac{j^2}{\gamma}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{\mu\mu_0H^2}{2}\right)+\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]. \qquad (38.5)$$

Выражение (38.5) представляет собой наиболее общую запись закона сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме. Рассмотрим физический смысл отдельных величин, входящих в уравнение (38.5). Произведение $\vec{j}\vec{E}_{\text{стор}}$ представляет собой работу сторонних ЭДС в единице объема за единицу времени, т. е. мощность; частное $\frac{j^2}{\gamma}$ — джоулеву теплоту, выделенную в единице объема за единицу времени; частная производная $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{\mu\mu_0H^2}{2}\right)$ — приращение электромагнитной энергии единицы объема за единицу времени, а $\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]$ — поток энергии, вытекающей из единицы объема за единицу времени. Следовательно, выражение (38.5) читается так: в единице объема за единицу времени работа сторонних ЭДС идет на покрытие джоулевых потерь, на увеличение электромагнитной энергии и на покрытие убыли энергии, вытекающей наружу. Вектор $[\vec{E}\vec{H}]$ представляет собой поток энергии через единичную площадку, расположенную перпендикулярно потоку. При $\vec{E}=\text{const}$ и $\vec{H}=\text{const}$ поток постоянен и вектор $[\vec{E}\vec{H}]$ выражает поток энергии за единицу времени, при переменных $\vec{E}$ и $\vec{H}$ он выражает мгновенное значение потока.

Введем обозначение:

$$\vec{S}=[\vec{E}\vec{H}], \qquad (38.6)$$

где S называют вектором Умова—Пойнтинга; его физический смысл разъяснен выше.

Умножим все члены равенства (38 5) на элемент объема и проинтегрируем по всему объему поля V:

$$\int_V \vec{j}\vec{E}_{\text{стор}}\,dV = \int_V \frac{j^2}{\gamma}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\right)dV + \int_V \operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]\,dV. \quad (38.7)$$

Наконец, после преобразования последнего интеграла согласно формуле Остроградского—Гаусса получим:

$$\int_V \vec{j}\vec{E}_{\text{стор}}\,dV = \int_V \frac{j^2}{\gamma}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\right)dV + \oint_\sigma [\vec{E}\vec{H}]_n d\sigma \quad (38\ 8)$$

(обозначим поверхность буквой σ, так как буквой S обозначен вектор Умова—Пойнтинга). Здесь интеграл в левой части означает работу P сторонних ЭДС в объеме V, первый интеграл справа—количество теплоты Q_m, выделяющееся в этом объеме, затем идет приращение электромагнитной энергии $\frac{\partial W}{\partial t}$ в этом объеме и, наконец, поток электромагнитной энергии через поверхность σ, ограничивающую объем V. При постоянстве всех величин, входящих в данное выражение, работа, теплота и т. д. относятся к единице времени; в общем случае следует говорить о мгновенных значениях соответствующих мощностей.

Выражение (38.8) представляет собой закон сохранения энергии в интегральной форме. С учетом введенных обозначений этой формуле можно придать следующий вид:

$$P = Q_m + \frac{\partial W}{\partial t} + \oint_\sigma S_n d\sigma. \quad (38.9)$$

Итак, ежесекундный поток энергии Σ через замкнутую поверхность выражается интегралами

$$\Sigma = \oint_\sigma S_n d\sigma = \oint_\sigma [\vec{E}\vec{H}]_n\, d\sigma \quad (38.10)$$

(теорема Умова—Пойнтинга).

Поток электромагнитной энергии за единицу времени через незамкнутую поверхность выражается аналогично.

Из выражения (38.6) вытекает, что вектор Умова—Пойнтинга перпендикулярен векторам поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т. е. электромагнитная энергия течет в направлении, перпендикулярном этим векторам.

Рассмотрим теперь поток энергии в цепи постоянного тока (рис. 68). Работа сторонних сил совершается в источнике, из которого энергия вытекает наружу; затем энергия перемещается вдоль проводника и извне постепенно втекает в проводник, переходя здесь в джоулеву теплоту. Это подтверждает направление

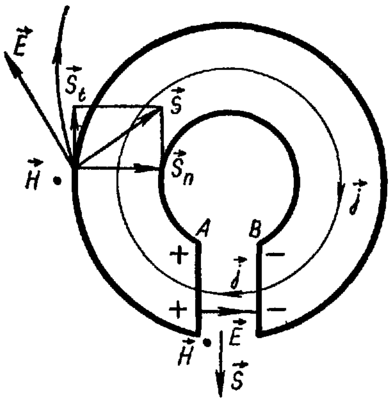

Рис. 68

вектора Умова—Пойнтинга, показанное на рисунке 68. На участке AB (внутри источника) ток идет от B к A, а поле $\vec{E}$ направлено от A к B. Следовательно, вектор Умова—Пойнтинга направлен из источника наружу. У произвольной точки C, лежащей на поверхности проводника, электрический вектор направлен по касательной к силовой линии; магнитный вектор обозначен точкой, т. е. направлен «на нас»; следовательно, вектор Умова—Пойнтинга направлен внутрь проводника. Разлагаем его на две составляющие: нормальную S_n и тангенциальную S_t. Наличие обеих составляющих выражает тот факт, что энергия здесь частично втекает в проводник, частично перемещается дальше вдоль проводника в направлении тока.

Нарисованная здесь общая энергетическая картина существенно отличается от распространенных представлений о механизме передачи электромагнитной энергии вдоль токонесущих проводов. Теория Максвелла, на которой основывается наша картина, приводит к фундаментальному различию между ролью проводников и непроводников в процессе передачи энергии. Неверно считать заряды, являющиеся носителями тока, также и носителями электромагнитной энергии тока. Носителем энергии является поле тока, локализованное как в проводнике, так и в окружающем его пространстве; в проводнике происходит лишь поглощение энергии, т. е. ее превращение в другие виды энергии.

§ 39. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В § 18 рассматривалась теорема единственности решения основной задачи электростатики. Рассмотрим теперь более общую теорему единственности решения уравнений электродинамики.

Эта теорема устанавливает степень полноты системы уравнений поля, поскольку при неполноте системы возникает опасность неоднозначности решения задач электродинамики; вместе с тем теорема позволяет считать полученное тем или иным способом решение задачи единственным. Теорема единственности базируется на анализе смешанной задачи Коши, когда заданы начальные условия для некоторого момента времени и граничные значения для всего рассматриваемого интервала времени.

Задачу можно сформулировать так: требуется найти напря-