Ввиду положительности подынтегрального выражения во всех точках это возможно лишь при условии $\vec{E}'=\vec{H}'=0$

Таким образом, теорема об однозначности решения задачи Коши для исходных уравнений доказана.

Теорема однозначности не требует полного знания значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе, достаточно задания тангенциальной составляющей одного из векторов — $\vec{E}$ или $\vec{H}$.

§ 40. ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

Понятие импульса (количества движения) долгое время применялось только к механическим движениям тел и частиц вещества. Затем выяснилось, что импульс присущ и другим формам движения материи. Это позволило сформулировать универсальный закон сохранения импульса, который совместно с законами сохранения энергии, заряда и ряда других величин образует фундамент научного материалистического миропонимания.

Перейдем к рассмотрению импульса электромагнитного поля. Пусть поле действует на объемные заряды, распределенные в пространстве с плотностью ρ, и токи с объемной плотностью j. На заряды и токи единичного объема действует сила [ср. (29.20)]

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+[\vec{j}\vec{B}]. \tag{40.1}$$

Полная сила $\vec{F}$, действующая на заряды и токи в объеме V, выделенном в электромагнитном поле, выразится интегралом

$$\vec{F}=\int\limits_V \vec{f}\,dV=\int\limits_V (\rho\vec{E}+[\vec{j}\vec{B}])\,dV. \tag{40.2}$$

По известной теореме механики сила $\vec{F}$ определяет изменение со временем импульса $G_{\text{мех}}$ всего вещества, заключенного в объеме V (учитывая при этом только силы электромагнитного происхождения):

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\vec{G}_{\text{мех}}. \tag{40.3}$$

Преобразуем уравнение (40.1), подставив вместо ρ и $\vec{j}$ их выражения из уравнений Максвелла (§ 37):

$$\rho=\operatorname{div}\vec{D},\quad \vec{j}=\operatorname{rot}\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

В результате получим:

$$\vec{f}=\vec{E}\operatorname{div}\vec{D}+[\operatorname{rot}\vec{H}\cdot\vec{B}]-\left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{B}\right]. \tag{40.4}$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{div}\vec{B}=0$, $\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, добавим к правой части уравнения (40.4) равное нулю выражение $\vec{H}\operatorname{div}\vec{B}$ и преобразуем последний член $\left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{B}\right]=\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}\vec{B}]-\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{D}\right]$. Тогда

$$\vec{f}=\vec{E}\operatorname{div}\vec{D}+\vec{H}\operatorname{div}\vec{B}+[\operatorname{rot}\vec{H}\cdot\vec{B}]+[\operatorname{rot}\vec{E}\cdot\vec{D}]-\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}\vec{B}]. \quad (40.5)$$

Составляющая силы $\vec{f}$ по оси x равна:

$$f_x=E_x\operatorname{div}\vec{D}+\vec{H}_x\operatorname{div}\vec{B}+[\operatorname{rot}\vec{H}.\vec{B}]_x+[\operatorname{rot}\vec{E}.\vec{D}]_x-\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}\vec{B}]_x;$$

ее можно привести к виду

$$f_x=\operatorname{div}\vec{\mathfrak{F}}-\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}\vec{B}]_x, \quad (40.6)$$

где компоненты $\vec{\mathfrak{F}}$ выражаются так:

$$\mathfrak{F}_x=D_xE_x+H_xB_x-\frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E}+\vec{H}\vec{B})_x,$$
$$\mathfrak{F}_y=D_xE_y+H_xB_y,$$
$$\mathfrak{F}_z=D_xE_z+H_xB_z.$$

Введем в выражение (40.6) равенство $[\vec{D}\vec{B}]=\varepsilon_0\mu_0[\vec{E}\vec{H}]$ и перейдем к составляющей общей силы по оси x:

$$F_x=\int_V f_x\,dV=\int_V\operatorname{div}\vec{\mathfrak{F}}\,dV-\frac{d}{dt}\int_V\varepsilon_0\mu_0[\vec{E}\vec{H}]\,dV. \quad (40.7)$$

Составляющие по другим осям координат записываются аналогично. Заменим в выражении (40.7) силу F ее выражением (40.3):

$$\frac{d}{dt}\left(G_{\text{мех},x}+\int_V\varepsilon_0\mu_0[\vec{E}\vec{H}]_x dV\right)=\int_V\operatorname{div}\vec{\mathfrak{F}}\,dV \quad (40.8)$$

и преобразуем последний интеграл по формуле Остроградского — Гаусса:

$$\int_V\operatorname{div}\vec{\mathfrak{F}}\,dV=\oint_S\mathfrak{F}_n\,dS=F_{\text{пов},x}.$$

Он, очевидно, представляет собой x-ю составляющую силы, действующей на поверхность, охватывающую объем V. Для других составляющих $\vec{F}$ формулы аналогичны. Переходя от составляющих к векторам, можно записать:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{G}_{\text{мех}}+\int_V\varepsilon_0\mu_0[\vec{E}\vec{H}]\,dV\right)=\vec{F}_{\text{пов}}. \quad (40.9)$$

Если на поверхности S, охватывающей объем V, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ равны нулю, то $\vec{F}_{\text{пов}}=0$. Это условие выполняется, если поверхность интегрирования S бесконечно удалена, а все заряды и токи локализованы в ограниченном объеме, образующем замкнутую систему. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{G}_{\text{мех}}+\int\limits_V \varepsilon_0\mu_0\,[\vec{E}\vec{H}]\,dV\right)=0,$$

следовательно,

$$\vec{G}_{\text{мех}}+\int\limits_V \varepsilon_0\mu_0\,[\vec{E}\vec{H}]\,dV=\text{const}. \qquad (40.10)$$

Таким образом, при взаимодействии зарядов и токов в определенном объеме с электромагнитным полем сохраняется не импульс вещества $\vec{G}_{\text{мех}}$, а его сумма с вектором $\varepsilon_0\mu_0\int\limits_V [\vec{E}\vec{H}]dV$, который имеет размерность импульса. Этот интеграл выражает импульс электромагнитного поля в объеме V, а вектор $\varepsilon_0\mu_0[\vec{E}\vec{H}]=\vec{g}_{\text{эм}}$ — его объемную плотность, соответственно

$$\int\limits_V \vec{g}_{\text{эм}}\,dV=\vec{G}_{\text{эм}}. \qquad (40.11)$$

Очевидно, в электромагнитном поле сохраняется сумма импульсов вещества и поля:

$$\vec{G}_{\text{мех}}+\vec{G}_{\text{эм}}=\text{const}. \qquad (40.12)$$

Следовательно, закон сохранения импульса выполняется строго только в том случае, когда наряду с механическим импульсом $\vec{G}_{\text{мех}}$ вещества будет учтен и импульс $\vec{G}_{\text{эм}}$ электромагнитного поля.

Из закона сохранения импульса вытекает, что электромагнитное поле при отражении или поглощении его телом оказывает на него давление (световое давление). Если бы тело было свободным, то под действием светового давления оно приобрело бы ускорение в направлении движения поля, т. е. увеличился бы его импульс. Приращение импульса одного тела связано с убылью импульса других частей системы. В нашем случае убывает импульс электромагнитного поля.

Давление, оказываемое электромагнитной волной на поглощающее тело, равно импульсу, передаваемому волной телу в единицу времени и на единицу поверхности. При падении волны по нормали к поверхности и ее полном поглощении поверхностью давление равно:

$$p=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}g_{\text{эм}}=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,EH=\varepsilon_0E^2=w\,^*, \qquad (40.13)$$

* В электромагнитной волне, как будет показано ниже, соблюдается равенство $\sqrt{\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu_0}H$ (в вакууме).

где $w=\frac{1}{2}(ED+HB)$ — плотность электромагнитной энергии волны. Следовательно, давление электромагнитной волны в этом случае численно равно плотности энергии волны.

В случае полного отражения от поверхности тела импульс волны меняется на противоположный и поверхности тела передается импульс в два раза больший, чем при полном поглощении. Соответственно, и давление в этом случае будет в два раза больше ($p=2w$).

Выше рассматривался вектор Умова — Пойнтинга, с которым связан импульс электромагнитного поля. Можно создать разнообразные устройства, в полости которых осуществляется циркуляция электромагнитной энергии по замкнутым путям. В таких случаях проявляется новый параметр электромагнитного поля — момент импульса (момент количества движения) относительно оси вращения.

Если такое устройство и циркулирующее в нем электромагнитное поле образуют замкнутую систему, то благодаря взаимодействию поля с зарядами и токами в стенках полости изменение момента импульса поля $\vec{L}_{эм}$ сопряжено с изменением момента импульса устройства $\vec{L}_{мех}$ и в согласии с законом сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{мех}=-\frac{d}{dt}\vec{L}_{эм},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_{мех}+\vec{L}_{эм})=0.$$

Процессы обмена моментом импульса между электромагнитным полем (светом) и веществом имеют важное значение в атомной физике.

§ 41. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ. УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА

Переменное электромагнитное поле в общем случае не удовлетворяет условиям квазистационарности (§ 31). В силу этого в выражения для векторов поля входят скорость распространения и время, иными словами, величина векторов поля в какой-либо момент времени определяется не тем распределением ρ, σ, $\vec{j}$, $\vec{i}$, которое наблюдается в этот момент времени, а распределением их в некоторый предыдущий момент времени. Изменение векторов поля не следует синхронно за изменениями источников поля, а запаздывает относительно их; в периодической функции $f\left(t-\frac{r}{v}\right)$ частное $\frac{r}{v}$ как раз и выражает запаздывание векторов