где $w=\frac{1}{2}(ED+HB)$ — плотность электромагнитной энергии волны. Следовательно, давление электромагнитной волны в этом случае численно равно плотности энергии волны.

В случае полного отражения от поверхности тела импульс волны меняется на противоположный и поверхности тела передается импульс в два раза больший, чем при полном поглощении. Соответственно, и давление в этом случае будет в два раза больше ($p=2w$).

Выше рассматривался вектор Умова—Пойнтинга, с которым связан импульс электромагнитного поля. Можно создать разнообразные устройства, в полости которых осуществляется циркуляция электромагнитной энергии по замкнутым путям. В таких случаях проявляется новый параметр электромагнитного поля — момент импульса (момент количества движения) относительно оси вращения.

Если такое устройство и циркулирующее в нем электромагнитное поле образуют замкнутую систему, то благодаря взаимодействию поля с зарядами и токами в стенках полости изменение момента импульса поля $\vec{L}_{эм}$ сопряжено с изменением момента импульса устройства $\vec{L}_{мех}$ и в согласии с законом сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{мех}=-\frac{d}{dt}\vec{L}_{эм},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_{мех}+\vec{L}_{эм})=0.$$

Процессы обмена моментом импульса между электромагнитным полем (светом) и веществом имеют важное значение в атомной физике.

§ 41. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ. УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА

Переменное электромагнитное поле в общем случае не удовлетворяет условиям квазистационарности (§ 31). В силу этого в выражения для векторов поля входят скорость распространения и время, иными словами, величина векторов поля в какой-либо момент времени определяется не тем распределением ρ, σ, $\vec{j}$, $\vec{i}$, которое наблюдается в этот момент времени, а распределением их в некоторый предыдущий момент времени. Изменение векторов поля не следует синхронно за изменениями источников поля, а запаздывает относительно их; в периодической функции $f\left(t-\frac{r}{v}\right)$ частное $\frac{r}{v}$ как раз и выражает запаздывание векторов поля, равное времени распространения электромагнитного процесса со скоростью v на расстоянии r от источника до точки наблюдения.

При исследовании стационарных и квазистационарных полей большую пользу приносит введение потенциалов: скалярного электрического потенциала φ и векторного потенциала магнитного поля $\vec{A}$. Как мы видели, вычисление этих величин по заданному распределению зарядов и токов выполняется проще, чем непосредственное вычисление напряженностей. Переход от потенциалов к векторам поля осуществляется простым дифференцированием.

Несколько видоизменив определение потенциалов, можно пользоваться ими в общем случае переменного электромагнитного поля. Для упрощения выкладок предполагаем, что во всей среде соблюдается условие постоянства проницаемостей ε и μ.

Определение векторного потенциала $\vec{A}$ сохраняется:

$$\mu\mu_0\vec{H}=\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}. \qquad (41.1)$$

Вводим векторный потенциал во II уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{A})=-\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0. \qquad (41.2)$$

Таким образом, вектор, стоящий в скобках, не имеет вихрей; он, однако, может иметь источники. Полагаем $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\varphi$, откуда

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi. \qquad (41.3)$$

Последнее выражение означает, что в общем случае электрическое поле состоит из вихревой и потенциальной частей.

Преобразуем теперь I уравнение Максвелла, используя выражения (41.1 и 41.3):

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\operatorname{grad}\varphi\right)+\vec{j}.$$

Используя формулу векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}$, получаем:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}=-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\operatorname{grad}\left(\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\mu\mu_0\vec{j};$$

наконец, группируем:

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\Delta\vec{A}=-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\mu\mu_0\vec{j}. \qquad (41.4)$$

Между векторным и скалярным потенциалами переменного поля можно установить некоторое дополнительное условие связи. Лоренц предложил такое условие в виде

$$\operatorname{div}\vec{A}+\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{41.5}$$

Условие Лоренца (41.5) в случае стационарных полей приводит к следствию, уже использованному ранее (28.3). Из условия Лоренца и из выражения (41.4) выводим дифференциальное уравнение для векторного потенциала электромагнитного поля:

$$\Delta\vec{A}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\mu_0\vec{j}. \tag{41.6}$$

Получим теперь дифференциальное уравнение для скалярного потенциала φ, исходя из выражения для дивергенции вектора электрической индукции $\vec{D}$:

$$\operatorname{div}\vec{D}=\operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E})=\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{div}\vec{E}=\rho.$$

Согласно уравнению (41.3) введем сюда значение $\vec{E}$:

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi\right)=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

откуда

$$-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Выразим далее $\operatorname{div}\vec{A}$ в соответствии с условием Лоренца (41.5) и введем символическое обозначение лапласиана $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$. После простых преобразований приходим к дифференциальному уравнению для скалярного потенциала электромагнитного поля:

$$\Delta\varphi-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{41.7}$$

Рассмотрим два важных равенства.

1) Из сопоставления численных значений постоянных $\varepsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м и скорости света следует, что произведение $\varepsilon_0\mu_0$ равно обратному значению квадрата скорости света c^2 в вакууме:

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}. \tag{41.8}$$

Из размерности единиц измерения ε_0 и μ_0 (Ф/м и Гн/м) вытекает, что $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ имеет размерность скорости.

2) Запишем отношение скорости света c в вакууме к квадратному корню из произведения относительных проницаемостей среды ε и μ:

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (41.9)$$

Поскольку ε и μ — безразмерные величины, записанное отношение имеет размерность скорости. Как выяснится несколько позже, скорость v представляет собой скорость распространения электромагнитных процессов в среде, характеризуемой значениями относительных проницаемостей ε и μ. Равенства (41.8) и (41.9) позволяют записать громоздкий множитель $\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ в уравнениях (41.6) и (41.7) как $\frac{1}{v^2}$. Тем самым эти уравнения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&\equiv\Box\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},\\ \Delta\vec{A}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&\equiv\Box\vec{A}=-\mu\mu_0\vec{j}.\end{aligned}\right| \quad (41.10)$$

Уравнения типа (41.10) хорошо изучены и носят название уравнений Даламбера; символ $\Box$ обозначает оператор Даламбера. В случае идеального диэлектрика ($\gamma=0$, $\rho=0$) они переходят в волновые уравнения:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

$$\Delta\vec{A}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}.$$

В случае стационарных полей $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\ \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0\right)$ уравнения Даламбера вырождаются в уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\Delta\vec{A}=-\mu\mu_0\vec{j}.$$

Решениями уравнений Пуассона в однородном безграничном пространстве являются интегральные выражения для потенциалов:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho\,dV}{r},\\ \vec{A}&=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{j}\,dV}{r}.\end{aligned}\right| \quad (41.11)$$

В математическом анализе доказывается, что решениями уравнений Даламбера (41.10) в однородиом безграничном пространстве являются интегралы

$$\varphi(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho(x', y', z', t')}{r}dV, \qquad (41\ 12)$$

$$\vec{A}(x, y, z, t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\int\limits_V \frac{\vec{j}(x', y', z', t')}{r}dV, \qquad (41.13)$$

где

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \text{ и } t'=t\pm\frac{r}{v}.$$

Если в выражении для t' выбрать знак «—», мы получим запаздывающие потенциалы, а если «+», то опережающие. Через r обозначено расстояние от точки источника (x', y', z') до точки наблюдения (x, y, z), v—скорость распространения электромагнитных возмущений. Стоящие под интегралом выражения $\rho\left(t-\frac{r}{v}\right)$ и $\vec{j}\left(t-\frac{r}{v}\right)$ следует понимать не как произведения, а как функции аргумента $\left(t-\frac{r}{v}\right)$. Например, при часто встречающихся гармонических колебаниях они будут иметь вид

$$\rho_0 \sin\omega\left(t-\frac{r}{v}\right) \text{ и } \vec{j}_0\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right).$$

Введение этих функций вместо постоянных значений ρ и $\vec{j}$ обусловлено запаздыванием потенциалов в точке наблюдения относительно мгновенных значений ρ и $\vec{j}$ в источнике.

В выражениях для потенциалов стационарных полей (41.11) и переменных полей (41.12 и 41.13) существует, однако, некоторое сходство. При определении скалярного потенциала в данной точке наблюдения в момент времени t нужно разбить все пространство на элементарные объемы dV и определить заряды dQ, находившиеся в этих объемах в предшествующие моменты времени $t-\frac{r}{v}$:

$$dQ=\rho\left(t-\frac{r}{v}\right)dV.$$

Разделив затем dQ на $4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$ и сложив все полученные выражения, находим скалярный потенциал. Аналогично находят составляющие векторного потенциала.

Таким образом, потенциалы переменного поля определяются аналогично потенциалам стационарного поля с тем, однако, важным дополнением, что в каждый момент времени t потенциалы поля, возбуждаемого на расстоянии r от элемента dV зарядами и токами этого элемента, определяются не одновременными с t, а предшествующими значениями этих зарядов и токов. Можно условно считать, что потенциалы φ и $\vec{A}$ распространяются из dV

по всем направлениям со скоростью $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, убывая при этом обратно пропорционально расстоянию r.

Из сказанного ясно, почему потенциалы φ и $\vec{A}$ переменного электромагнитного поля называются запаздывающими потенциалами. Изложенные здесь соображения уточняются в главе VII.

Упражнения

34. Покажите, что джоулева теплота, выделяемая током в участке проводника, равна количеству электромагнитной энергии, втекающей в этот участок проводника (рис. 69)

Указание. В целях упрощения берем проводник в виде прямого цилиндра с радиусом a Напряженность магнитного поля на поверхности цилиндрического проводника (упр. 29) равна·

$$H=\frac{I}{2\pi a}=\frac{\pi j a^2}{2\pi a}=\frac{ja}{2}.$$

У поверхности проводника тангенциальная составляющая E_t равна напряженности поля внутри проводника, поэтому по закону Ома $E_t=E=\frac{j}{\gamma}$.

Поскольку E_t и H взаимно перпендикулярны, можно в выражении для вектора Умова—Пойнтинга перейти к скалярным значениям.

35. Покажите, что при изменении во времени магнитного поля с осевой симметрией $[H_x=H_y=0,\ H_z=H(r,\ t)]$ возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности с центрами на оси магнитного поля Как известно, на основе этого явления действует бетатрон Примите, что $\varepsilon=\mu=1$ (вакуум)

Указание. Исходите из II уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},$$

где $\vec{H}$ направлено по оси z, и запишите это уравнение в цилиндрической системе координат.

При анализе решения ответьте на вопрос: каким образом в бетатроне добиваются стационарности вихревого электрического поля на протяжении небольшого промежутка времени?

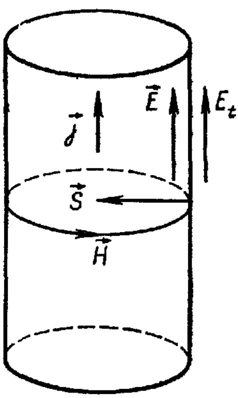

Рис. 69