# VI. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

## § 42. ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Уже в 1863 г. Максвелл на основе полученных им уравнений электромагнетизма предсказал существование электромагнитных волн. Покажем, что в однородной изотропной непроводящей среде ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = 0$) векторы поля удовлетворяют волновому уравнению, причем скорость распространения волн $v$ равна $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Выпишем снова систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{42.1}$$

В однородной изотропной среде $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, а из условия $\gamma = 0$ (поскольку $\vec{j} = \gamma\vec{E}$) следует, что $\vec{j} = 0$. Из закона сохранения заряда $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ вытекает, что $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, т. е. что $\rho = \rho(x, y, z)$. Но независящее от времени распределение плотности заряда может породить только постоянное поле, и если нас интересуют лишь переменные поля, то можно считать, что $\rho = 0$. Это позволяет записать систему уравнений Максвелла в виде

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{42.2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \tag{42.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \tag{42.4}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{42.5}$$

Дифференцируя уравнение (42.1) по времени и заменяя в полученном уравнении $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ из уравнения (42.2), имеем:

$$-\frac{1}{\mu\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{42 6}$$

Пользуясь формулой векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}-\Delta\vec{E}$ и принимая во внимание уравнение (42.3), получим:

$$\Delta\vec{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0, \tag{42.7}$$

где применено обозначение из уравнения (41.9). Аналогичным образом, исключая $\vec{E}$ из уравнений (42.1) и (42.2), находим, что вектор $\vec{H}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\vec{H}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0. \tag{42.8}$$

Уравнения (42.7) и (42.8)—это волновые уравнения соответственно для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Мы подробно займемся решением этих уравнений позже, а пока сделаем лишь несколько замечаний.

Из того, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют волновому уравнению, вытекает, что электромагнитное поле, которое характеризуют эти векторы, может распространяться в виде волны. Скорость распространения электромагнитной волны, как это видно из уравнения (42.6), определяется исключительно свойствами среды. Из уравнений (42.7) и (42.8) следует, что электромагнитные волны могут распространяться в среде. Но волны возникают лишь тогда, когда их возбуждают. Из того, что векторы поля удовлетворяют волновому уравнению, вовсе не вытекает какой-либо практический способ возбуждения электромагнитных волн. Получить экспериментально электромагнитные волны Г. Герцу удалось в 1888 г., т. е. лишь двадцать лет спустя после предсказания Максвелла.

Электромагнитные волны возбуждаются зарядами и токами. Но, возникнув, электромагнитная волна существует и тогда, когда породивших ее токов и зарядов уже нет. Этим переменное поле отличается от статического, которое не может существовать без порождающих его зарядов.

Рассмотрим теперь решения волнового уравнения. Начнем с самого простого случая—пространственно одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0. \tag{42.9}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$s(x, t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{v}\right), \tag{42.10}$$

где $f_1$ и $f_2$—произвольные функции, а аргументы этих функций представляют собой специальные комбинации переменных $x$, $t$ и постоянной $v$. Смысл этих решений прост. Если в момент $t=0$

графически изобразить функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то в последующие моменты времени эти функции смещаются вдоль оси $x$ со скоростью $v$ как целое: $f_1$ — вправо, а $f_2$ — влево.

Мы ограничимся в дальнейшем так называемыми гармоническими монохроматическими волнами, т. е. синусоидальными волнами с одной циклической частотой $\omega = 2\pi\nu$.

Гармоническая зависимость любой величины $s$ от времени может быть представлена в общем виде так:

$$s(x, t) = s_0(x) e^{i\omega t},$$

где $s_0$ — значение рассматриваемой величины в точке с координатой $x$ в начальный момент времени $t = 0$. Решение волнового уравнения (42.8), удовлетворяющее условию (42.10) и дающее гармоническую зависимость $s$ от $t$, имеет вид

$$s(x, t) = s_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}. \qquad (42.11)$$

Фаза волны, т. е. ее состояние в данной точке пространства в данный момент времени, определяется выражением $\left(t - \frac{x}{v}\right)$. В данный момент времени поверхность равной фазы — волновой фронт — описывается уравнением $x = \text{const}$. Это плоскость, нормальная к оси $x$ и перпендикулярная направлению распространения волны. Поверхность равной фазы (волновой фронт) распространяется вправо с фазовой скоростью $v$. Поскольку волновой фронт является плоскостью, мы получили плоскую волну.

Нам понадобится еще выражение для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, характеризуемом постоянным единичным вектором $\vec{m}$. Поскольку уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{m}$, имеет вид $\vec{m}\vec{r} = \text{const}$, плоскую волну можно записать в виде

$$s(r, t) = s_0 e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{m}\vec{r}}{v}\right)} = s_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\vec{m}\vec{r}\right)}. \qquad (42.12)$$

Введем волновой вектор $\vec{k}$, определив его как

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{m}, \qquad (42.13)$$

где $\vec{m}$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Тогда плоская волна может быть представлена в виде

$$s(r, t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \qquad (42.14)$$

Убедимся, что уравнение (42.14) является решением пространственно-трехмерного волнового уравнения. Удобно ввести оператор Даламбера $\square$:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{42.15}$$

где через $\Delta$ обозначен оператор Лапласа. Тогда волновое уравнение для скалярной величины $s$ можно записать так:

$$\Box s = 0. \tag{42.16}$$

Применяя к выражению (42.14) оператор $\Box$, получим:

$$\Box s(r, t) = \left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) s_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) s, \tag{42.17}$$

откуда в силу уравнения (42.13) приходим к выражению (42.16).

Нам понадобится еще решение волнового уравнения, зависящее только от расстояния до некоторой точки. В сферических координатах это будет решение $s = s(r, t)$. Общее решение волнового уравнения в этом случае имеет вид

$$s(r, t) = A\frac{\varphi_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + B\frac{\varphi_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}, \tag{42.18}$$

где $A$ и $B$ — произвольные постоянные, а $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — произвольные функции определенной комбинации переменных $t$, $r$ и скорости $v$.

Волновой фронт, т. е. поверхность, в точках которой фаза колебаний одинакова, в решении (42.18) уже является сферой, поэтому функция $s(r, t)$ описывает сферические волны. Распространяются сферические волны по радиус-вектору от точки их возбуждения (центра). Существенно, что, в отличие от плоской волны, амплитуда сферической волны не постоянна, а обратно пропорциональна расстоянию. Функция $\varphi_1$ определяет расходящуюся (от центра) волну, а $\varphi_2$ — сходящуюся. Уравнение гармонической сферической волны можно, очевидно, записать так:

$$s(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \frac{B}{r} e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}. \tag{42.19}$$

Вектор $\vec{k}$ называют волновым вектором потому, что он имеет непосредственное отношение к длине волны. Длиной волны, как известно, называется расстояние (отсчитанное в направлении распространения волны) между двумя ближайшими точками волны, обладающими одинаковой фазой (в данный момент времени). Рассмотрим плоскую волну (42.14) и допустим, что фазы в точках $r$ и $r + \lambda$ одинаковы. Тогда в любой момент времени должно соблюдаться равенство

$$e^{-ikr} = e^{-ik(r+\lambda)}.$$

Это может быть лишь в том случае, если $|k|\lambda = 2\pi$, т. е.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$