§ 43. СВОЙСТВА ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Для простоты будем рассматривать монохроматические плоские волны, но результаты, которые мы получим, справедливы для любых плоских волн. Мы видели, что в однородной изотропной непроводящей среде векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются в соответствии с волновыми уравнениями (42.7) и (42.8) при условии (42.13), т. е. $k=\frac{\omega}{v}$. Если представить пространственно-временное изменение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в виде плоских волн

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})},\quad \vec{H}=\vec{H}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}, \tag{43.1}$$

то эти выражения, безусловно, удовлетворяют уравнениям (42.7) и (42.8). Однако, чтобы они удовлетворяли уравнениям Максвелла, на них следует наложить еще дополнительные условия. Подставляя выражение (43.1) соответственно в (42.4) и (42.5), получим:

$$0=\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}(\vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})})=-i\vec{k}\vec{E},$$
$$0=\operatorname{div}\vec{H}=\operatorname{div}(\vec{H}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})})=-i\vec{k}\vec{H}$$

(по поводу этих равенств см. «Дополнения», 1). Равенство нулю означает, что $\vec{E}\perp\vec{k}$ и $\vec{H}\perp\vec{k}$. Кроме того, нетрудно установить, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны. Чтобы убедиться в этом, подставим выражения (43.1) в левые части уравнений (42.2) и (42.3) и получим:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\operatorname{rot}(\vec{H}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})})=-i[\vec{k}\vec{H}],$$
$$\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{rot}(\vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})})=-i[\vec{k}\vec{E}],$$

(по поводу этих равенств см. «Дополнения», 1). Тогда уравнения (42.2) и (42.3) примут вид

$$-i[\vec{k}\vec{H}]=i\varepsilon\varepsilon_0\omega\vec{E},\ \text{или}\ \vec{E}=-\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}[\vec{k}\vec{H}], \tag{43.2}$$

$$-i[\vec{k}\vec{E}]=-i\mu\mu_0\omega\vec{H},\ \text{или}\ \vec{H}=\frac{1}{\omega\mu\mu_0}[\vec{k}\vec{E}]. \tag{43.3}$$

Достаточно умножить выражение (43.2) на $\vec{H}$ или выражение (43.3) на $\vec{E}$, чтобы получить:

$$\vec{E}\vec{H}=0. \tag{43.4}$$

Из полученных формул следует, что векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов в том порядке, в котором они написаны. Взаимное расположение этих

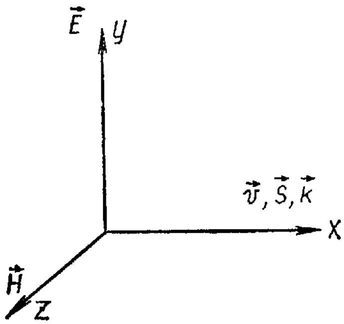

Рис. 70

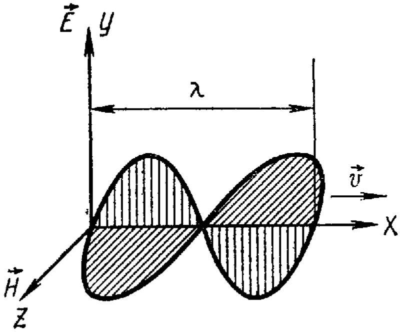

Рис. 71

векторов приведено на рисунке 70. На рисунке 71 представлен график плоской электромагнитной волны.

Вектор $\vec{k}$ определяет направление распространения волны. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению $\vec{k}$. Таким образом, электромагнитная волна в указанных условиях является поперечно-поляризованной (направление колебаний перпендикулярно направлению распространения). В плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны для направления вектора $\vec{E}$ (и перпендикулярного к нему вектора $\vec{H}$) никаких ограничений нет. В силу линейности уравнений Максвелла, или, что то же самое, в силу суперпозиции полей, решением является любая сумма полей, у которых векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лежат в указанной плоскости.

Напомним, что если в электромагнитной волне вектор $\vec{E}$ имеет единственное направление (и, следовательно, единственное направление имеет вектор $\vec{H}$), то волна называется линейно-поляризованной. Ниже будут приведены доказательства того, что свет представляет собой электромагнитные волны, частоты которых лежат в определенном интервале. Если в световой волне вектор $\vec{E}$ (и $\vec{H}$) имеет всевозможные направления, то такой свет принято называть естественным. Следовательно, свет как плоская электромагнитная волна может быть в однородной среде как естественным, так и линейно-поляризованным.

Вычислим вектор Умова-Пойнтинга плоской электромагнитной волны:

$$\vec{S} = [\vec{E}\,\vec{H}] = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}[\vec{E}\,[\vec{k}\,\vec{E}]] = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\vec{k}E^2. \qquad (43.5)$$

Введем единичный вектор $\vec{m}$ в направлении распространения волны $(\vec{m}=\vec{k}/k)$. Поскольку $v=\omega/k$, $k=\omega/v=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$, то

$$\vec{S}=\frac{k}{\omega\mu\mu_0}E^2\vec{m}=\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2\vec{m}. \qquad (43.6)$$

Найдем соотношение между абсолютными значениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской волне. Из уравнений (43.2) и (43.3) имеем:

$$\vec{E}=-\frac{k}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}[\vec{m}\vec{H}],\quad \vec{H}=\frac{k}{\omega\mu\mu_0}[\vec{m}\vec{E}]. \qquad (43.7)$$

Имея в виду, что $k=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}$, получим:

$$\vec{E}=-\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}[\vec{m}\vec{H}],\quad \vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}[\vec{m}\vec{E}]. \qquad (43.8)$$

Учитывая, что векторы $\vec{m}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны, находим соотношение между абсолютными значениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu\mu_0}H. \qquad (43.9)$$

Из общего определения плотности электромагнитной энергии

$$w=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{\mu\mu_0H^2}{2} \qquad (43.10)$$

с учетом уравнения (43.9) для плоской волны получим:

$$w=\varepsilon\varepsilon_0E^2=\mu\mu_0H^2. \qquad (43.11)$$

Запишем теперь окончательное выражение для вектора Умова — Пойнтинга в плоской волне:

$$\vec{S}=\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}\varepsilon\varepsilon_0E^2\vec{m}=vw\vec{m}. \qquad (43.12)$$

Полученное равенство имеет простой смысл. Через единичную площадку, поставленную перпендикулярно распространению волны, в единицу времени проходит энергия, заключенная в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой v. Эта энергия равна $1\cdot v\cdot w$, т. е. значению вектора Умова — Пойнтинга (43.12).

В связи с фундаментальным значением вопросов, рассмотренных в § 42—43, необходимы некоторые методические обобщения.

В курсе средней школы учащиеся должны усвоить, что световые волны являются электромагнитными волнами определенной частоты. Перечислим факты, демонстрирующие единую природу световых и электромагнитных волн:

1. Явления дифракции и интерференции света, известные уже до появления теории Максвелла, указывали на волновую при-

роду света. Как мы видели в § 42, электромагнитное поле в определенных условиях также имеет волновой характер.

2. Скорость света в вакууме c многократно измерялась, а уточнения ее продолжаются до настоящего времени (c — важнейшая физическая константа). С другой стороны, для скорости электромагнитных волн в вакууме мы получаем из теории Максвелла теоретическое значение $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Совпадение экспериментального и теоретического значений скорости (с высокой степенью точности) — прямое указание на единство природы света и электромагнитных волн.

3. Из геометрической оптики известно, что если скорость в вакууме равна c, а в среде — v, то относительный показатель преломления среды n равен: $\frac{c}{v}$. Для электромагнитных волн из теории Максвелла следует, что $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, т. е. что $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$. Сопоставляя экспериментальные значения n (например, из закона преломления света) и значение $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ для не слишком высоких частот, получаем близкие значения.

4. Световая волна поперечная. Это было открыто уже в начале XIX в. Мы видели, что плоские электромагнитные волны поперечные. Свет может быть линейно поляризованным или естественным. То же самое относится и к электромагнитной волне.

5. Все основные законы геометрической оптики могут быть получены на основании уравнений Максвелла для электромагнитных волн (см. § 46).

§ 44. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ И РЕАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Выражения для векторов поля в случае монохроматических волн $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$, $\vec{H}=\vec{H}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$ представляют собой идеализацию распространения переменных физических полей. Для понимания характера этой идеализации воспользуемся некоторыми результатами так называемого гармонического анализа (фурье-анализа), основанного на теории интеграла Фурье.

Если функция $f(x)$ или $f(t)$ задана в бесконечном интервале ($-\infty<x<\infty$ или $-\infty<t<\infty$), ее можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\,e^{ikx}\,dk,\quad f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega, \tag{44.1}$$

где коэффициенты $g(k)$ или $g(\omega)$, играющие роль спектральной плотности разложения функций $f(x)$ и соответственно $f(t)$, определяются интегрированием: