

роду света. Как мы видели в § 42, электромагнитное поле в определенных условиях также имеет волновой характер.

2. Скорость света в вакууме  $c$  многократно измерялась, а уточнения ее продолжают до настоящего времени ( $c$ —важнейшая физическая константа). С другой стороны, для скорости электромагнитных волн в вакууме мы получаем из теории Максвелла теоретическое значение  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Совпадение экспери-

ментального и теоретического значений скорости ( $c$  с высокой степенью точности)—прямое указание на единство природы света и электромагнитных волн.

3. Из геометрической оптики известно, что если скорость в вакууме равна  $c$ , а в среде— $v$ , то относительный показатель преломления среды  $n$  равен:  $\frac{c}{v}$ . Для электромагнитных волн из теории Максвелла следует, что  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ , т. е. что  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ . Со-

поставляя экспериментальные значения  $n$  (например, из закона преломления света) и значение  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  для не слишком высоких частот, получаем близкие значения.

4. Световая волна поперечная. Это было открыто уже в начале XIX в. Мы видели, что плоские электромагнитные волны поперечные. Свет может быть линейно поляризованным или естественным. То же самое относится и к электромагнитной волне.

5. Все основные законы геометрической оптики могут быть получены на основании уравнений Максвелла для электромагнитных волн (см. § 46).

#### § 44. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ И РЕАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Выражения для векторов поля в случае монохроматических волн  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  представляют собой идеализацию распространения переменных физических полей. Для понимания характера этой идеализации воспользуемся некоторыми результатами так называемого гармонического анализа (фурье-анализа), основанного на теории интеграла Фурье.

Если функция  $f(x)$  или  $f(t)$  задана в бесконечном интервале ( $-\infty < x < \infty$  или  $-\infty < t < \infty$ ), ее можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (44.1)$$

где коэффициенты  $g(k)$  или  $g(\omega)$ , играющие роль спектральной плотности разложения функций  $f(x)$  и соответственно  $f(t)$ , определяются интегрированием:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (44.2)$$

Поскольку интеграл представляет собой предел некоторой суммы, то согласно выражению (44.1) заданная функция  $f(x)$  или  $f(t)$  может быть выражена в виде непрерывной суммы гармонических функций  $e^{ikx}$  или  $e^{i\omega t}$  с коэффициентами  $g(x)$  или  $g(\omega)$ . Если бы функции  $f(x)$  или  $f(t)$  были заданы на конечном интервале изменения переменных, то их разложение по гармоническим переменным было бы настоящей суммой, а набор частот представлял бы совокупность дискретных значений. В этом случае, как говорят, спектр частот был бы дискретным. В нашем случае функций, заданных в бесконечном интервале, спектр частот, определяемый спектральными функциями  $g(k)$  и  $g(\omega)$ , сплошной.

Рассмотрим важный пример—спектральное разложение конечного (во времени) гармонического колебания. Пусть  $f(t)$  отлична от нуля лишь в интервале  $-\tau_0 \leq t \leq \tau_0$ :

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t}, & |t| \leq \tau_0, \\ 0, & |t| > \tau_0. \end{cases}$$

Функция  $f(t)$  задана на бесконечном интервале, поэтому мы используем интеграл Фурье.

Поскольку период колебания  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , число волн, содержащихся в ограниченной последовательности волн, равно:

$$n = \frac{2\tau_0}{T_0} = \frac{\tau_0 \omega}{\pi}.$$

Найдем спектральную плотность  $g(\omega)$ :

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega)} \Big|_{-\tau_0}^{\tau_0} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau_0}{(\omega_0 - \omega)}. \end{aligned} \quad (44.3)$$

Функция  $g(\omega)$  очень интересна. Прежде всего она отлична от нуля для всех частот  $\omega$ . Эта функция в этом интервале не монохроматическая волна с одной частотой, а волна, содержащая колебания многих частот. Как выглядит спектр частот конечной синусоиды, видно из выражения (44.3). При  $\omega \rightarrow \omega_0$  функция  $g(\omega)$ , как легко обнаружить, имеет максимальное значение  $g(\omega_0) = \frac{2\tau_0}{\sqrt{2\pi}}$ . При  $\omega \rightarrow \pm \infty$  функция  $g(\omega)$  обращается в нуль.

Найдем ширину спектрального интервала  $\Delta\omega$ , на котором функ-

ция  $g(\omega)$  превышает половину своего максимального значения. Границы этого интервала находят из условия  $g(\omega) = \frac{g(\omega_0)}{2}$ :

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau_0}{\omega_0 - \omega} = \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi}}. \quad (44.4)$$

Из равенства (44.4) следует, что  $\sin(\omega_0 - \omega)\tau_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau_0$ , т. е.  $\sin\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ , где  $\varphi = (\omega_0 - \omega)\tau_0$ ; это выполняется для  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  (по абсолютному значению).

Поскольку искомый интервал  $\Delta\omega$  равен  $2(\omega_0 - \omega)$ , мы получим, что всегда  $\Delta\omega \cdot \tau_0 > \pi$ ,  $\Delta\omega > \pi/\tau_0$ .

Таким образом, чтобы получить  $\Delta\omega \sim 0$ , нужно взять  $\tau_0$  очень большим, т. е. бесконечную во времени синусоиду. С другой стороны, ясно, что достаточно длинная синусоида — это почти монохроматическая волна. Если требуется передать некоторую информацию, то нужно нарушить гармоническое изменение той или иной величины (например, синусоида «включается» или «выключается»). Таким образом, практически мы имеем дело всегда с немонохроматическими величинами. Если в волне все частоты близки друг к другу, т. е. «группируются» около некоторой частоты  $\omega_0$ , то говорят о группе волн. Как мы видели из выражения (44.3), достаточно длинный отрезок синусоиды как раз и представляет собой «группу волн».

Мы рассмотрели функцию  $f(t)$ , перейдем теперь к пространственной функции  $f(x)$ . Ее разложение (44.1) мы осуществим уже не по частотам  $\omega$ , а по волновым векторам  $\vec{k}$ . Рассмотрим «группу волн» в том смысле, что все волновые векторы  $\vec{k}$  близки к какому-то волновому вектору  $\vec{k}_0$ ; это значит, что  $g(k)$  отлично от нуля в интервале  $k_0 - \delta \leq k \leq k_0 + \delta$ . Возьмем некоторую функцию  $f(x, t)$  в момент времени  $t = 0$ , считая, что она представляет собой группу волн в указанном смысле. Тогда, представив эту функцию в виде интеграла Фурье, получим:

$$f(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk = \int_{k_0 - \delta}^{k_0 + \delta} g(k) e^{ikx} dk = \quad (44.5)$$

$$= \int_{\delta}^{+\delta} g(k_0 + z) e^{i(k_0 + z)x} dz = e^{ik_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_0 + z) e^{izx} dz = A(x) e^{ik_0 x}.$$

Прежде чем использовать полученный результат, поясним последние преобразования. В третьем звене равенств (44.5) учтено, что  $g(k)$  отлично от нуля в интервале  $k_0 - \delta, k_0 + \delta$ . В четвертом сделана замена переменных  $k = k_0 + z$ ,  $dk = dz$ . В последнем звене равенств (44.5) введено обозначение:

$$A(x) = \int_{-\delta}^{+\delta} g(k_0 + z) e^{izx} dz. \quad (44.6)$$

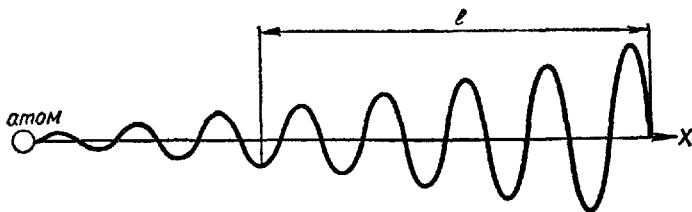


Рис. 72

Нетрудно выяснить характер изменения функции  $A(x)$ . Так как  $z = k - k_0$ , то  $z_{\max} = |k - k_0|_{\max} = \delta$ . Но по условию «группы» величина  $\delta$  мала. Значит, в выражение (44.6) входят только гармонические функции с малым  $z$ , т. е. медленно меняющиеся в пространстве. Из этого вытекает, что  $A(x)$  — медленно изменяющаяся в пространстве функция.

Мы пришли к очень важной интерпретации соотношения (44.5). Группа волн — это гармоническая во всем пространстве функция  $e^{ik_0x}$ , но с медленно меняющейся (в пространстве) амплитудой  $A(x)$ . Полученные нами результаты имеют непосредственное отношение к оптическим вопросам.

В классической электродинамике и волновой оптике моделью источника световых волн является упруго связанный электрон (модель атома Томсона). Такой электрон после возбуждения совершает затухающие колебания и соответственно излучает импульс, или, как принято говорить, пуг волн. На рисунке 72 изображена система (цуг) волн, распространяющихся от атома вдоль оси  $x$ .

В оптике большое значение имеет среднее время жизни возбужденного атома  $\tau$ , представляющее собой промежуток времени, начиная от момента возбуждения, в течение которого энергия электрона, полученная при возбуждении, убывает вследствие излучения в  $e$  раз (т. е. до 37% своего начального значения). Опыт и теория приводят к хорошо согласующемуся выводу о величине  $\tau \approx 10^{-8}$  с.

За длину цуга  $l$  принимают общую длину системы волн, которая испускается за время  $\tau$ ; при этом, очевидно, пренебрегают «хвостом» цуга, где колебания имеют небольшую амплитуду. Длину цуга можно найти как отрезок, который проходит волна за время  $\tau$ :  $l = c\tau \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3$  м. Обычно за длину светового цуга принимают отрезок от 3 до 5 м. Число длин волн  $n$ , укладываемых на этой длине, при  $\lambda = 0,6$  мкм (видимый свет) равно:  $n = l/\lambda = 5 \cdot 10^6$ . Таким образом, в пределах цуга укладываются миллионы длин волн; налицо, следовательно, довольно медленное затухание. Отметим попутно, что вибратор Герца, как и любой другой генератор затухающих колебаний, также излучает волны отдельными цугами, однако цуг здесь существенно

длиннее (поскольку волны длиннее), но декремент затухания больший.

Выделенный диафрагмой узкий пучок света, называемый обычно световым лучом, является результатом излучения огромного числа независимых атомов, иначе говоря, он является совокупностью огромного количества не связанных между собой цугов, следующих друг за другом или взаимно накладывающихся. Колебания электронов в этих атомах происходят, конечно, в самых разнообразных направлениях и с различными фазами. Полагая, что в каждом цуге колебания электрического вектора волны по направлению совпадают с колебаниями электронов в излучающем атоме, мы приходим к выводу о непрерывном изменении плоскости колебаний вектора  $\vec{E}$  (светового вектора) в луче, что сразу же приводит к наглядному представлению о естественном (неполяризованном) луче света.

Итак, реальные световые волны, испускаемые отдельными атомами, имеют ограниченную длину цуга и убывающие амплитуды.

В последнее время получили широкое распространение оптические квантовые генераторы (лазеры), излучение которых представляет собой также совокупность огромного количества цугов, но связанных друг с другом: все характеристики этих цугов (частота, направление распространения, поляризация) совпадают. Вследствие узкой направленности лазерного луча (т. е.  $k \approx k_0$  в импульсе) амплитуда почти не изменяется в пространстве.

Все эти особенности позволяют считать излучение лазера близким к монохроматическому.

## § 45. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ

Скорость распространения волн  $v$  входит в выражение для фазы волнового колебания в рассматриваемой точке  $x$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Это уравнение, как указывалось, описывает строго монохроматическую волну. Для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v$  (например, на определенном «гребне» волны), фаза постоянна:  $\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const}$ . Дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом,  $v$  — скорость распространения определенной фазы колебания, поэтому она называется фазовой скоростью.

Реальная световая волна, как указывалось, не является монохроматической. Она может быть представлена как суперпозиция