VII. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 48. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ. УСЛОВИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ ПОЛЯ

В § 41 рассматривались общие выражения (уравнения Даламбера) для потенциалов φ и $\vec{A}$ переменного электромагнитного поля (41.10):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\Delta A_x - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 j_x,$$

$$\Delta A_y - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 j_y,$$

$$\Delta A_z - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 j_z.$$

Выясним характерные особенности решения эти уравнений. Нужно считать, что правые части уравнений (41.10) являются известными функциями координат и времени. Если правая часть этих уравнений обращается в нуль, то получаем волновые уравнения (решение волнового уравиения см. в § 42). Связь между переменными зарядами и токами и их электромагнитным полем описывается решениями неоднородных уравнений.

Рассмотрим одно из частных решений уравнений Даламбера. Так как все четыре уравнения (41.10) относятся к одному и тому же типу, достаточно рассмотреть частное решение первого уравнения:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho(r', t),$$

где $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$. Функция $\rho(r', t)$ задана в некоторой конечной области пространства. В отличие от рассмотренной в § 19 задачи нахождения поля системы статических зарядов в данном случае объемная плотность является переменной во времени. Частное решение этого уравнения с использованием обозначений, введенных в § 19 и на рисунке 36, имеет вид

$$\varphi(R_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r', t')}{r}dV' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t')\,d\xi_1,\, d\xi_2,\, d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}, \qquad (48.1)$$

где $t' = t - \frac{r}{v}$ — эффект запаздывания, dV' — элемент объема, зависящий от времени.

Решение уравнения (48.1), определяющее скалярный потенциал φ в точке R_0 в момент t, представляет собой суперпозицию потенциалов точечных зарядов $\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\rho(r', t')}{r}dV'$ (как и при решении уравнения Пуассона с той лишь разницей, что теперь появилась зависимость потенциалов от времени). Зависимость потенциалов от времени $t' = t - \frac{r}{v}$ показывает, что потенциал (а следовательно, и векторы поля) в точке наблюдения R_0 в момент времени t определяются величиной заряда в точке r', имевшегося там в более ранний момент времени $t' = t - \frac{r}{v}$. Отношение $\frac{r}{v}$ представляет собой время, за которое от точки местонахождения заряда до точки наблюдения доходит «сигнал», распространяющийся со скоростью v.

Отметим, что в решение уравнения (48.1) на равных основаниях с запаздывающими потенциалами $\varphi\left(t' = t - \frac{r}{v}\right)$ могут входить и опережающие потенциалы $\varphi\left(t' = t + \frac{r}{v}\right)$, которыми мы не пользовались. Опережающие потенциалы связывают значение потенциала в рассматриваемой точке в момент t с пространственным распределением зарядов и токов в последующие моменты времени $t + \frac{r}{v}$. Общее решение уравнения Даламбера может быть представлено как сумма частного решения (в виде запаздывающих или опережающих потенциалов) и общего решения соответствующего однородного уравнения $\Box\varphi = 0$. Лишь задание определенных начальных и граничных условий дает возможность найти единственное решение, отвечающее поставленной задаче.

Запишем теперь выражение для векторного потенциала в точке R_0 в момент времени t:

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r}dV', \tag{48.2}$$

где обозначения аналогичны обозначениям в формуле (48.1).

Из выражения (48.2) можно вывести основное условие квазистационарности, которое ранее (§ 31) было введено без строгого обоснования. Так как магнитное поле непосредственно определяется через векторный потенциал ($\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$), то из запаздывания потенциала при распространении электромагнитной волны вытекает и запаздывание вектора поля $\vec{B}$. Каждый элемент тока $\vec{j}dV'$ определяет элемент векторного потенциала:

$$d\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r} dV'.$$

Чтобы можно было во все моменты времени $t' = t - \frac{r}{v}$ пренебречь запаздыванием $\frac{r}{v}$, необходимо, чтобы характерный для токов период изменения T намного превосходил наибольшее время запаздывания поля в системе. Это наибольшее время, очевидно, равно характеристическому размеру системы l, деленному на v. Таким образом, условие квазистационарности приобретает вид

$$\frac{l}{v} \ll T, \quad \text{или} \quad l \ll vT.$$

В случае периодического процесса, при котором скорость распространения поля равна v, произведение vT определяет длину волны λ. Соответственно условие квазистационарности записывается так:

$$l \ll \lambda. \tag{48.3}$$

§ 49. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ

В § 42 было показано, что в однородной изотропной среде в отсутствии зарядов и токов векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют волновому уравнению, причем скорость распространения волн $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$. Там же при исследовании свойств плоских электромагнитных волн мы выяснили, что вектор Умова—Пойнтинга в плоской волне может быть выражен через один вектор поля, например $\vec{E}$ или $\vec{H}$ (43.5).

Рассмотрим теперь излучение локализованной в ограниченном объеме системы зарядов и токов, распределение которых зависит от координат и времени. Характер излучения такой системы исследуем при помощи вектора Умова—Пойнтинга.

Воспользуемся частным решением для электродинамических потенциалов (42.19); это решение представляет собой суперпозицию сферических волн. Но сферическая волна по мере удаления от своего источника, принимаемого за начало отсчета, по виду волнового фронта все больше приближается к плоской волне. Напомним, что ограниченная плоскость представляет собой участок сферы бесконечно большого радиуса. Однако плоская волна характеризуется не только тем, что ее волновой фронт—плоскость. Существенно, что амплитуда плоской волны постоянна. Амплитуда же сферической волны обратно пропорциональна r.