тока $\vec{j}\,dV'$ определяет элемент векторного потенциала:

$$d\vec{A}=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r}',\,t')}{r}dV'.$$

Чтобы можно было во все моменты времени $t'=t-\frac{r}{v}$ пренебречь запаздыванием $\frac{r}{v}$, необходимо, чтобы характерный для токов период изменения T намного превосходил наибольшее время запаздывания поля в системе. Это наибольшее время, очевидно, равно характеристическому размеру системы l, деленному на v. Таким образом, условие квазистационарности приобретает вид

$$\frac{l}{v}\ll T, \quad \text{или} \quad l\ll vT.$$

В случае периодического процесса, при котором скорость распространения поля равна v, произведение vT определяет длину волны λ. Соответственно условие квазистационарности записывается так:

$$l\ll\lambda. \tag{48.3}$$

§ 49. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ

В § 42 было показано, что в однородной изотропной среде в отсутствии зарядов и токов векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют волновому уравнению, причем скорость распространения волн $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$. Там же при исследовании свойств плоских электромагнитных волн мы выяснили, что вектор Умова—Пойнтинга в плоской волне может быть выражен через один вектор поля, например $\vec{E}$ или $\vec{H}$ (43.5).

Рассмотрим теперь излучение локализованной в ограниченном объеме системы зарядов и токов, распределение которых зависит от координат и времени. Характер излучения такой системы исследуем при помощи вектора Умова—Пойнтинга.

Воспользуемся частным решением для электродинамических потенциалов (42.19); это решение представляет собой суперпозицию сферических волн. Но сферическая волна по мере удаления от своего источника, принимаемого за начало отсчета, по виду волнового фронта все больше приближается к плоской волне. Напомним, что ограниченная плоскость представляет собой участок сферы бесконечно большого радиуса. Однако плоская волна характеризуется не только тем, что ее волновой фронт—плоскость. Существенно, что амплитуда плоской волны постоянна. Амплитуда же сферической волны обратно пропорциональна r.

Решение сферически симметричного волнового уравнения, если ограничиться только запаздывающим потенциалом, имеет вид:

$$\varphi(r, t)=\frac{A}{r} f\left(t-\frac{r}{v}\right). \qquad (49.1)$$

Для монохроматической волны это выражение записывается так:

$$\varphi(r, t)=\frac{A}{r} e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}, \qquad (49.2)$$

где A — амплитудное значение потенциала при $r=1$ и $t=0$.

Из последнего выражения видно, что амплитуда пропорциональна $\frac{1}{r}$. Естественно, что всегда можно выделить достаточно малый участок сферы, который можно принять за плоскость. Вопрос состоит в том, при каких условиях допустимо считать амплитуду сферической волны постоянной. Для выяснения этого вопроса найдем производную:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=A\left[-\frac{i\omega}{rv}-\frac{1}{r^2}\right] e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}.$$

Зависимость амплитуды от r определяется вторым членом в квадратных скобках. Им можно пренебречь по сравнению с первым членом в квадратных скобках при условии $\frac{1}{r}\frac{\omega}{v}\gg\frac{1}{r^2}$, т. е.

$$r\gg\frac{v}{\omega}\sim\lambda. \qquad (49.3)$$

Это условие определяет некоторое характеристическое «расстояние» от рассматриваемой системы зарядов и токов. Таким образом, мы пришли к выводу: если рассматриваются потенциалы (или векторы поля) достаточно далеко от системы зарядов и токов, так что соблюдено условие $r\gg\lambda$, то при выборе достаточно малого телесного угла можно считать сферическую волну, ограниченную этим телесным углом, плоской. Этот вывод поможет нам при предстоящих вычислениях, так как необходимые формулы для плоских волн уже получены в предыдущей главе.

Область пространства, удовлетворяющая неравенству (49.3), называют волновой зоной.

Поскольку для расчета вектора Умова — Пойнтинга в плоской волне достаточно задать магнитное поле, то мы можем ограничиться вычислением векторного потенциала $\vec{A}$. Здесь мы с небольшими видоизменениями повторим выкладки, проведенные ранее при вычислении потенциала системы статических зарядов (§ 19).

Исходим из приведенной выше формулы (41.13) для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r} dV',$$

где $t' = t - \frac{r}{v}$.

Вводя обозначения $\vec{r} = \vec{R}_0 - \vec{r}'$, $\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$ и полагая $\frac{r'}{R_0} \ll 1$, получим в первом приближении:

$$r = R_0 - \vec{n}\vec{r}'.$$

Тогда подынтегральное выражение в (41.13) приобретает вид

$$\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R_0 - \vec{n}\vec{r}'}{v}\right)}{R_0 - \vec{n}\vec{r}'}.$$

В знаменателе этого выражения в качестве нулевого приближения можно допустить $R_0 - \vec{n}\vec{r}' \approx R_0$. Член $\frac{\vec{n}\vec{r}'}{v}$ определяет относительное запаздывание волны, распространяющейся от точки $\vec{r}'$ в точку наблюдения $\vec{R}_0$. По порядку величины этот член равен $\frac{l}{v}$, где l — характеристический линейный размер системы. В предыдущем параграфе мы занимались вопросом: когда можно пренебречь запаздыванием в пределах рассматриваемой системы? Ответ на вопрос дает условие квазистационарности. Если оно соблюдено, то можно допустить, что $t' = t - \frac{R_0}{v} \equiv \tau$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0} \int\limits_V \vec{j}(\vec{r}', \tau)\, dV', \qquad (49.4)$$

где $\tau = t - \frac{R_0}{v}$.

Интеграл (49.4), которым определяется векторный потенциал $\vec{A}(\vec{R}_0, t)$, можно преобразовать к более удобному виду. Для этого запишем закон сохранения заряда для любой точки r' и любого момента времени τ:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau)}{\partial t} + \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}', \tau) = 0, \qquad (49.5)$$

где штрих у оператора дивергенции означает, что дифференцирование ведется по переменным координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3. Умножая оба члена в левой части выражения (49.5) на $r'dV'$ и интегрируя по всему объему, занятому зарядами и токами, имеем:

$$\int\limits_V \vec{r}'\dot{\rho}(\vec{r}', \tau)\, dV' + \int\limits_V \vec{r}' \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}', \tau)\, dV' = 0. \qquad (49.6)$$

Первый член в левой части (49.6) представляет собой производную по времени от дипольного момента системы, т. е. $\dot{\vec{P}}(\tau)$

[ср. § 19, ф-ла (19.8)]. Второй член слева равен $\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}', \tau)\,dV'$, что можио легко проверить выполнением операции дифференцирования. Таким образом мы получаем важную формулу:

$$\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}', \tau)\,dV' = \dot{\vec{P}}(\tau), \tag{49.7}$$

которая позволяет переписать выражение (49.4) в удобной форме:

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0}\dot{\vec{P}}(\tau) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R}\dot{\vec{P}}(\tau). \tag{49.8}$$

В формуле (49.8) в последнем члене равенства вместо R_0 написано R, где R—расстояние от произвольной точки внутри объема V. Дело в том, что для нейтральной системы зарядов величина ее дипольного момента не зависит от выбора начала отсчета.

§ 50. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ПРЕДЕЛАХ МАЛОГО ТЕЛЕСНОГО УГЛА ВОЛНОВОЙ ЗОНЫ

Перейдем к рассмотрению векторного потенциала в волновой зоне. В плоской волне интересующий нас вектор Умова—Пойнтинга определяется через напряженность магнитного поля следующим образом [см. формулы (43.5)—(43.9)]:

$$\vec{S} = v(\mu\mu_0 H^2)\vec{m}, \tag{50.1}$$

поэтому для решения задачи достаточно найти значение индукции $\vec{B}$ по формуле

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Используем выражение (49.8) и полагаем величину $\frac{1}{R}$, входящую в амплитуду, постоянной величиной; это означает, что мы ограничиваемся малым перемещением в направлении распространения волны. Находим:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R}\operatorname{rot}\dot{\vec{P}}\left(t - \frac{R}{v}\right) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R}\left[\operatorname{grad}\left(t - \frac{R}{v}\right)\ddot{\vec{P}}\right] = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R v}[\vec{m}\ddot{\vec{P}}], \tag{50.2}$$

где $\vec{m} = \frac{\vec{R}}{R}$. В третьем звене наших равенств мы провели дифференцирование функции от функции *. Из выражения (50.2) вытекает:

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi r v}[\vec{m}\ddot{\vec{P}}]. \tag{50.3}$$

* См. «Дополнения», 2.