При доказательстве мы пользуемся выводом, полученным при решении задачи (упр. 10) о поле сферического слоя, равномерно заряженного по объему. На электрон, расположенный на расстоянии x от центра атома, действует только положительный заряд шара радиусом x. Напряженность поля сферического слоя, внешнего по отношению к электрону, в месте расположения электрона равна нулю. Заряд шара радиусом x действует на электрон так же, как точечный заряд такой же величины, расположенный в центре шара, т. е. в центре атома; поэтому величина этой силы может быть вычислена по закону Кулона.

Объемная плотность положительного заряда равна $\dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$, поэтому заряд шара радиусом x равен $\frac{4}{3}\pi x^3 \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \dfrac{ex^3}{a^3}$. Отсюда согласно закону Кулона получаем силу притяжения электрона к центру атома:

$$f = -\frac{ex^3}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \cdot \frac{e}{x^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} x. \quad (58.1)$$

В данном случае знак силы определяется отрицательным знаком заряда электрона. Следовательно, на смещенный из положения равновесия электрон действует квазиупругая возвращающая сила, что является, как уже указывалось выше, условием гармонического колебания электрона, с которым связано излучение электромагнитных волн. Коэффициент перед x в (58.1) представляет собой, очевидно, коэффициент квазиупругой силы:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = m\omega^2. \quad (58.2)$$

По известной частоте, характеризующей спектральную линию, из формулы (58.2) можно определить порядок размера атома. Полагаем частоту света $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \cdot 10^{14}$ Гц, тогда

$$a = \sqrt[3]{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m 4\pi^2 \nu^2}} \approx 10^{-10} \text{ м} = 10^{-8} \text{ см}.$$

Томсон получил правильную величину «размеров» атомов, однако считать, что таковы размеры объема, занятого положительным зарядом в атоме, было ошибочным. Опытами Резерфорда было показано, что положительный заряд атома сосредоточен в ядре, линейные размеры которого в несколько десятков тысяч раз меньше размеров атома.

§ 59. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим вопрос об излучении упруго связанного колеблющегося электрона.

Пусть во время возбуждения электрон был «подброшен» до границы атома, т. е. удален от положения равновесия на расстояние a; исследуем частное решение уравнения движения такого электрона

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{59.1}$$

в форме

$$x=a\cos\omega t. \tag{59.2}$$

Энергия колеблющегося электрона W складывается из кинетической энергии $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ и потенциальной $\frac{kx^2}{2}$. Полная энергия колеблющегося электрона

$$W=\frac{ma^2\omega^2}{2}. \tag{59.3}$$

Мы получили, очевидно, максимальную энергию, которой может обладать электрон, оставаясь внутри атома.

Запишем формулу для средней мощности излучения вибратора $\bar{\Sigma}$ (51.6):

$$\bar{\Sigma}=\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4p_0^2}{c^3}. \tag{59.4}$$

Дипольный момент атома $p_0=ea$, откуда

$$\bar{\Sigma}=\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4e^2a^2}{c^3}. \tag{59.5}$$

Введем выражение для энергии (59.3), тогда

$$\bar{\Sigma}=\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2\omega^2}{mc^3}W. \tag{59.6}$$

Здесь не учтено затухание вследствие излучения. Поскольку колеблющийся электрон излучает электромагнитные волны, то уравнения (59.1) и (59.2) не являются точными уравнениями движения, а уравнения (59.4)—(59.6)—точными формулами мощности. Естественно, что амплитуда колебания электрона после возбуждения будет все время убывать, поэтому в уравнение (59.1) следует ввести еще одну силу, называемую обычно лучистым трением, а в уравнение (59.2)—множитель, учитывающий затухание. При использовании выражения (59.6) правильней считать $\bar{\Sigma}$ значением мгновенной мощности, а W—значением мгновенной энергии электрона.

Изменение излучения в результате слабого затухания колебаний электрона можно учесть следующим образом: производная $-\frac{dW}{dt}$ представляет собой, очевидно, убыль энергии колеблющегося электрона за единицу времени (мощность излучения).

Полагая $\bar{\Sigma}=-\frac{dW}{dt}$, получим

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2\omega^2}{mc^3}W, \tag{59.7}$$

Выражение (59.7) есть закон убывания энергии электрона вследствие излучения в дифференциальной форме. Обозначим для краткости: $\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2e^2\omega^2}{mc^3}=\gamma$; тогда

$$\frac{dW}{dt}=-\gamma W. \tag{59.8}$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{dW}{W}=-\gamma\,dt;\ \ln W=-\gamma t+\ln C;$$

$$\ln\frac{W}{C}=-\gamma t;\ W=Ce^{-\gamma t}.$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий: при $t=0$ (момент возбуждения) $C=W_0$—начальная энергия возбуждения. Мы получили закон излучения в интегральной форме

$$W=W_0e^{-\gamma t}.$$

Таким образом, энергия излучающего электрона убывает по экспоненциальному закону. В оптике большое значение имеет величина $\tau=\frac{1}{\gamma}$, называемая средним временем жизни возбужденного атома. Очевидно, что при $t=\tau$ энергия электрона уменьшается в $e\approx2{,}7$ раза. Таким образом, средняя продолжительность жизни возбужденного атома представляет собой промежуток времени от момента возбуждения до момента, когда энергия электрона, полученная при возбуждении, убывает вследствие излучения в e раз (т. е. до 37% своего начального значения).

При излучении видимого света ($\nu\approx5\cdot10^{14}$ Гц) средняя продолжительность жизни возбужденного атома оказывается равной

$$\tau=\frac{1}{\gamma}=\frac{12\pi\varepsilon_0 mc^3}{2e^2\omega^2}\approx10^{-8}\ \text{с}.$$

Отсюда вытекает важное представление о «структуре» световых волн. Каждый атом после возбуждения излучает свет в виде импульса, или, как принято говорить, цуга волн, свойства которого уже были рассмотрены в § 44.

§ 60. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСИИ

Дисперсию света в элементарных курсах физики определяют как разложение сложного света (например, белого) на составные компоненты (на «цвета»). Как известно, разложение легко осуществить при помощи призмы. Возможность разложения света на компоненты обусловлена тем, что свету с разной длиной волны соответствуют разные показатели преломления, а следовательно, разные скорости распространения в одной и той же среде.