Определение времени события в разных системах K и K' осуществляется следующим образом. Пусть в момент наступления события в данной точке A пространства там же находились часы системы K и часы системы K'. Время данного события в системе K фиксируется показаниями часов системы K, а время того же события в системе K' — показаниями часов системы K', оказавшихся в точке A.

Чтобы можно было сравнивать показания часов двух систем, нужно установить связь между показаниями двух наборов синхронизированных часов. Пусть в некоторый момент времени начала координатных систем O и O' совпадают. Часам этих систем, находящимся в совпадающих точках O и O', приписываются одинаковые показания ($t=t'=0$). Во всех остальных точках часы из разных наборов будут показывать разное время.

§ 64. СЛЕДСТВИЯ ПОСТУЛАТОВ СТО

1. В том случае, если относительное движение систем K и K' происходит так, как это изображено на рисунке 85, размер эталона длины (линейки), покоящегося в K и совпадающего по направлению с осью Y (или Z), т. е. перпендикулярно движению, одинакова, измеряют ли его по масштабам и часам системы K или же по масштабам и часам системы K'. Предлагаем читателям самостоятельно провести соответствующие рассуждения. Из этого факта следуют два соотношения для двух координат события:

$$y=y', \quad z=z'.$$

2. **Относительность промежутков времени.** Рассмотрим мысленный эксперимент. В системе K' в точке O' находится радиолокатор, на некотором расстоянии от него z_0' помещено зеркало (это означает, что радиолокатор и зеркало неподвижны относительно K'). Посылаем радиосигнал из начала отсчета O' и ждем его возвращения. Промежуток времени между посылкой и возвращением сигнала

$$\Delta t'=\frac{2z_0'}{c}.$$

Рассмотрим те же два события в системе K. Пусть в начальный момент времени системы K и K' совпадали, и в этот момент был послан сигнал. Какой промежуток времени Δt отсчитали часы в системе K между посылкой и приемом сигнала (рис. 87)?

Из рисунка 87 по теореме Пифагора находим:

$$z_0^2+V^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2=c^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\Delta t=\frac{2z_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

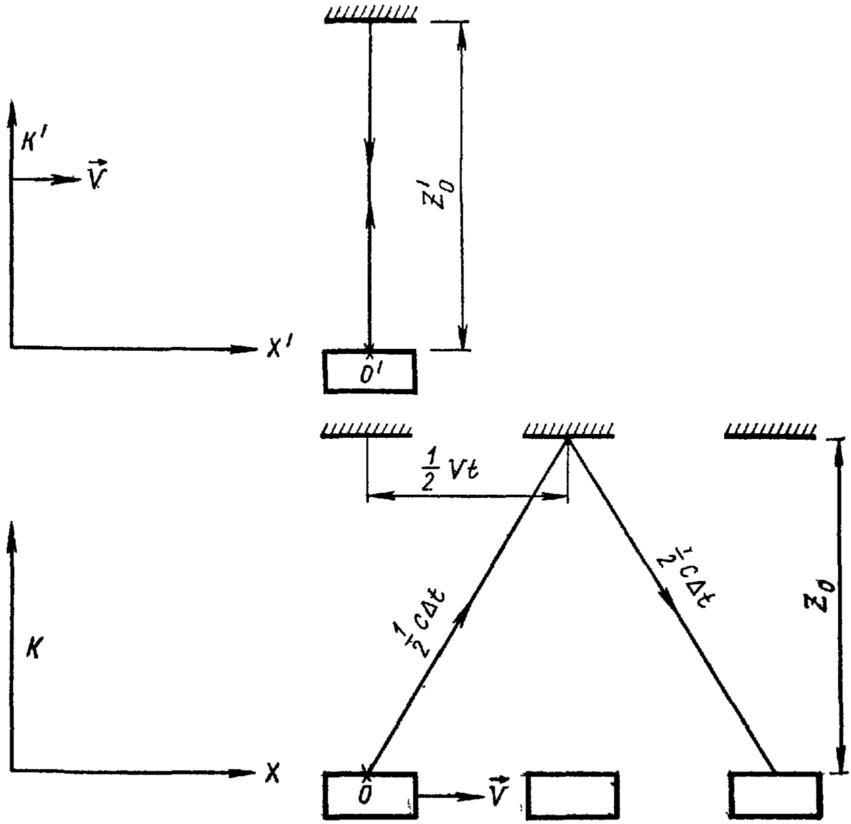

Рис. 87

Но поскольку $z_0 = z'_0$, можно написать $\Delta t' = \frac{2z_0}{c}$, и из последнего равенства получаем:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{64.1}$$

Промежуток времени между двумя событиями относителен, он разный в разных системах отсчета.

Введем обозначения:

$$\frac{V}{c} = \beta, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Gamma; \tag{64.2}$$

тогда полученный результат можно записать так:

$$\Delta t = \Gamma \Delta t'. \tag{64.3}$$

В системе K' промежуток времени между двумя рассмотренными событиями отсчитывался одними часами. Если события наступают в одной и той же точке системы, промежуток между ними отсчитывается одними часами и называется промежутком собственного времени. Промежуток собственного времени будем обозначать $\Delta\tau$. Итак, интервал собственного времени между событиями и промежуток координатного времени между той же парой событий не совпадают.

Координатное время — это промежуток времени, отсчитанный по двум синхронизированным часам некоторой системы отсчета.

Приведенный пример показывает, что часы систем K и K', находившиеся в момент $t'=t=0$ в одной точке пространства, могут отсчитывать различные моменты времени Действительно, в момент возвращения сигнала в точку O' часы в O' покажут время $t'=0+\Delta t'$. Часы же системы K, находящиеся в точке 0, отметят момент времени $t=0+\Delta t$. Это будут разные моменты времени. Проанализировав этот «эксперимент», нетрудно обнаружить, что в нем непосредственно используется синхронизация часов по Эйнштейну

3. **Относительность длин линеек, расположенных вдоль направления относительного движения систем отсчета.** Пусть в системе K' вдоль оси X' расположена неподвижная линейка длиной l_0. На конце линейки имеется зеркало. От начала линейки посылается световой сигнал и наблюдается его возвращение после отражения от зеркала (рис. 88). Очевидно,

$$l_0=c\cdot\frac{\Delta\tau}{2},$$

где $\Delta\tau$ — промежуток собственного времени между посылкой и возвращением светового сигнала. Пусть системы K и K' совпадали в момент времени $t=t'=0$. Найдем теперь длину линейки l в системе K.

Свет в системе K догоняет зеркало со скоростью $c-V$, а затем идет навстречу началу линейки со скоростью $c+V$, поэтому про-

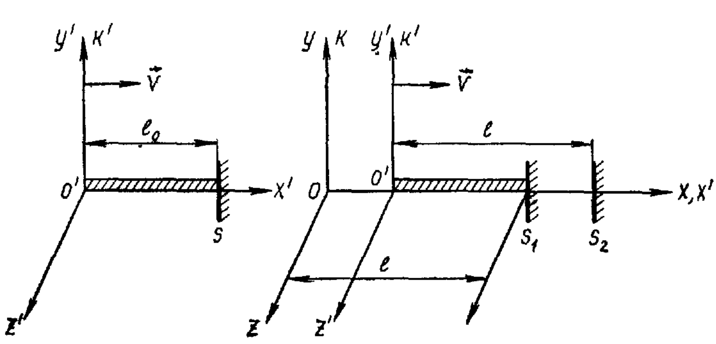

Рис 88

межуток времени между посылкой и возвращением сигнала в системе K равен:

$$\Delta t = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-\beta^2} = \frac{2l}{c}\,\Gamma^2.$$

Но мы только что выяснили, что $\Delta t = \Gamma \Delta\tau$. Отсюда предыдущее равенство запишется так:

$$\frac{2l}{c}\,\Gamma = \Delta\tau.$$

Но $\frac{c\Delta\tau}{2} = l_0$, откуда

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{64.4}$$

Если измерять длину стержня в той системе, где он покоится, получаем собственную длину стержня l_0. В движущейся системе отсчета у него другая длина:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Этот результат называют относительностью длин.

Получим теперь преобразования координат события при переходе от одной ИСО к другой — преобразования Лоренца. Сначала найдем формулу преобразования координаты x события. В начальный момент времени, когда координатные системы K и K' совпадают, с точки зрения K координатная сетка K' вдоль общей оси X, X' сжата: $x = x'\sqrt{1-\beta^2} = \frac{x'}{\Gamma}$.

С течением времени вся картина смещается вправо со скоростью V:

$$x = \frac{x'}{\Gamma} + Vt,$$

откуда

$$x' = \Gamma(x - Vt) = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{64.5}$$

Это и есть формула преобразования координаты x события.

Теперь нужно найти временну́ю координату события в системе K', если координаты этого события K были (x, y, z, t). Мы предпочтем довольно длинный вывод, имеющий ряд методических достоинств.

Снова рассматриваем две системы отсчета K и K'. В тот момент, когда начала отсчета O и O' совпадают (и по условию часы систем K и K', находящиеся в общем начале координат, показывают $t=0$ и $t'=0$), из этого общего начала вдоль положительного направления оси X посылается световой сигнал (рис. 89). Поскольку эксперимент проводится в вакууме, скорость сигнала равна c. Теперь посмотрим, что можно сказать

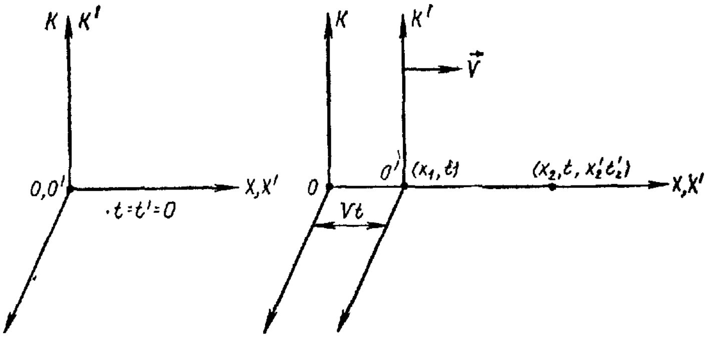

Рис. 89

о показаниях часов системы K' в некоторый момент времени t, зафиксированный по часам K. За время $\Delta t = t$ световой сигнал дойдет до точки пространства, координата которой в системе K равна: $x_2 = ct$. Эта же точка в системе K' будет иметь координату $x_2' = ct'$. Приход светового сигнала в точку пространства — это событие, и x-е координаты события должны быть связаны соотношением (64.5); подставляя в него x_2 и x_2' и разделив обе части на c, получим:

$$t_2' = \Gamma(1-\beta)\,t.$$

Итак, если свет приходит в некоторую точку пространства, то часы в двух системах отсчета K и K' показывают разное время наступления этого события. Нетрудно подсчитать, что показывают часы системы K еще в одной точке, а именно в точке $x_1 = Vt$. В этой точке в момент t окажется начало отсчета O' и те часы, которые в момент посылки сигнала показывали время $t' = 0$. По часам системы K к этому моменту истек промежуток времени $\Delta t = t$. Но часы, закрепленные в O', отсчитали при этом промежуток собственного времени $\Delta\tau = t_1' - 0$. Следовательно, согласно формуле (64.3) они покажут время

$$t_1' = \frac{\Delta t}{\Gamma} = \frac{t}{\Gamma}.$$

Это очень важный результат. Если одновременно в системе K отметить показания часов системы K' в разных точках x, мы получим различные отсчеты. Не забудем, что и в K, и в K' часы синхронизированы. Но синхронизация часов оказалась относительной. У нас уже есть все, чтобы рассчитать «рассинхронизацию» часов. Сопоставим полученные результаты:

$$x_1 = Vt, \quad t_1' = \frac{t}{\Gamma},$$

$$x_2 = ct, \quad t_2' = \Gamma(1-\beta)\,t.$$

На длине $\Delta x = x_2 - x_1 = c(1-\beta)t$ набегает разность показаний часов $t_2' - t_1' = \Gamma\beta(\beta - 1)t$. Таким образом, на единице длины рассинхронизация составит

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x} = -\Gamma \frac{\beta}{c}. \tag{64.6}$$

Она не зависит от момента времени t. Для произвольной пары точек x_2 и x_1 можно записать:

$$t_2' - t_1' = -\Gamma \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1).$$

По условию согласования двух наборов часов в точке $x_1 = 0$ имеем показание часов $t_1' = 0$, если $t = 0$. Поэтому, полагая, $x_2 = x$, получим:

$$t'(x,\ t = 0) = -\Gamma\left(\frac{\beta}{c}\right)x.$$

Из этой формулы видно, что покажут часы системы K', находящиеся в точке x в момент времени $t = 0$. Слева от начала отсчета O часы системы K' опережают часы системы K, а справа отстают от них.

Но нам нужно знать, что покажут часы системы K', находящиеся в момент времени t в точке x, т. е. $t'(x, t)$. В точке x в момент t окажутся те часы системы K', которые в момент $t = 0$ были в точке $x - Vt$ и согласно выражению (67.6) отставали от часов в системе K на промежуток времени $-\Gamma\frac{\beta}{c}(x - Vt)$. Эта разность не зависит от времени. Но в момент t часы системы K', находящиеся в O', показывают момент $t_1' = \frac{t}{\Gamma}$. Следовательно, показаиие часов системы K', которое мы ищем, равно:

$$t'(x,\ t) = \frac{t}{\Gamma} - \Gamma\frac{\beta}{c}(x - Vt) = \Gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{64.7}$$

Это и есть искомая формула. Соберем теперь вместе все преобразования координат события, представляющие собой преобразования Лоренца:

$$\begin{gathered} x'(x,\ t) = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t'(x,\ t) = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \end{gathered} \tag{64.8}$$

Формулы обратного перехода можно получить изменением знака переносной скорости:

$$\begin{gathered} x(x',\ t') = \Gamma(x' + Vt'), \\ t(x',\ t') = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \end{gathered}$$

что непосредственно вытекает из первого постулата СТО (равноправия всех ИСО).

Приводим преобразования Лоренца для прямого и обратного перехода без введенной ради сокращения величины Г:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad\qquad\qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right| \tag{64.9}$$

§ 65. ИНТЕРВАЛ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

Проведем еще один мысленный эксперимент, рассматривая его в двух ИСО—K и K'. В начальный момент, когда по условию оба начала отсчета O и O' совпадают, $t = t' = 0$; в общем начале отсчета произведем вспышку света. Согласно второму постулату СТО свет распространяется по всем направлениям в K и K' с одинаковой скоростью c. Следовательно, волновой фронт (т. е. поверхность равных фаз) будет представлять собой сферы в обеих системах. Уравнения этих сфер можно записать:

в системе K	в системе K'
$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$	$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$.

Мы написали для системы K' справа t' (вместо t) по следующим соображениям. Допустим, что время в системах K и K' одинаково, т. е. $t = t'$. Тогда радиусы обеих сфер (для данного момента t) оказываются одинаковыми. Получается, что один и тот же физический объект—волновой фронт—описывается с равным правом двумя сферами одинакового радиуса, но с центрами в точках O и O'. Это бессмысленно, следовательно, положить $t = t'$ невозможно. Перепишем оба равенства в виде

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

В этом мысленном опыте фактически речь идет о двух событиях. Первое из них состоит в отправлении сигнала из начала системы отсчета $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ в момент времени $t_0 = 0$; второе—в приходе сигнала в произвольную точку сферы с координатами x, y, z в момент времени t. Если составить выражение

$$\sqrt{c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2} = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

которое называют интервалом между двумя событиями и обозначают символом s, то полученный нами результат можно сформулировать так: для двух событий, состоящих в отправлении