что непосредственно вытекает из первого постулата СТО (равноправия всех ИСО).

Приводим преобразования Лоренца для прямого и обратного перехода без введенной ради сокращения величины Г:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad\qquad\qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right| \qquad (64.9)$$

## § 65. ИНТЕРВАЛ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

Проведем еще один мысленный эксперимент, рассматривая его в двух ИСО—$K$ и $K'$. В начальный момент, когда по условию оба начала отсчета $O$ и $O'$ совпадают, $t = t' = 0$; в общем начале отсчета произведем вспышку света. Согласно второму постулату СТО свет распространяется по всем направлениям в $K$ и $K'$ с одинаковой скоростью $c$. Следовательно, волновой фронт (т. е. поверхность равных фаз) будет представлять собой сферы в обеих системах. Уравнения этих сфер можно записать:

| в системе $K$ | в системе $K'$ |
|---|---|
| $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ | $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$. |

Мы написали для системы $K'$ справа $t'$ (вместо $t$) по следующим соображениям. Допустим, что время в системах $K$ и $K'$ одинаково, т. е. $t = t'$. Тогда радиусы обеих сфер (для данного момента $t$) оказываются одинаковыми. Получается, что один и тот же физический объект—волновой фронт—описывается с равным правом двумя сферами одинакового радиуса, но с центрами в точках $O$ и $O'$. Это бессмысленно, следовательно, положить $t = t'$ невозможно. Перепишем оба равенства в виде

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

В этом мысленном опыте фактически речь идет о двух событиях. Первое из них состоит в отправлении сигнала из начала системы отсчета $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ в момент времени $t_0 = 0$; второе—в приходе сигнала в произвольную точку сферы с координатами $x$, $y$, $z$ в момент времени $t$. Если составить выражение

$$\sqrt{c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2} = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

которое называют интервалом между двумя событиями и обозначают символом $s$, то полученный нами результат можно сформулировать так: для двух событий, состоящих в отправлении светового сигнала из одной точки и приходе его в другую, квадрат интервала между этими событиями в любой ИСО должен быть равен нулю: $s^2=0$, $s'^2=0$.

Конечно, интервал между событиями может быть определен не только для отправления и прихода светового луча. Если координаты события *1* определяются числами $x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$, а координаты события *2* — $x_2$, $y_2$, $z_2$, $t_2$, то по определению интервал между этими событиями $s_{12}$ равен:

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}; \qquad (65.1)$$

для произвольных событий интервал $s_{12}$ уже не равен нулю.

Часто бывает удобно перейти к рассмотрению событий, происходящих в бесконечно близких точках и в бесконечно близкие моменты времени. Полагая в этом случае $t_2-t_1=dt$, $x_2-x_1=dx$, $y_2-y_1=dy$, $z_2-z_1=dz$, получим для квадрата интервала:

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \qquad (65.2)$$

Основным свойством интервала между событиями является его инвариантность при переходе от одной ИСО к другой.

Из мысленного эксперимента по посылке—приему светового сигнала следует согласно выражению (65.2), что если в одной ИСО $ds^2=0$, то и во всякой другой $ds'^2=0$. Обе величины—$ds^2$ и $ds'^2$—бесконечно малые одного порядка, поэтому должны быть пропорциональны друг другу. Следовательно, можно записать

$$ds^2=a\,ds'^2,$$

где $a$—коэффициент пропорциональности. Это соотношение должно выполняться для интервала между любой парой событий. Действительно, никаких условий на связь между интервалами $ds$ и $ds'$ для пары произвольных событий у нас нет, а для событий частного вида—приема и отправления светового сигнала—связь должна быть именно такой. Коэффициент $a$ не может зависеть от координат $x$, $y$, $z$ и времени $t$, потому что это означало бы, что различные точки пространства и различные моменты времени неравноправны.

Так как мы считаем пространство и время однородными, то $a$ должно быть постоянной величиной, зависящей только от абсолютного значения относительной скорости двух рассматриваемых ИСО. Действительно, коэффициент $a$ не может зависеть и от направления относительной скорости двух ИСО, так как это означало бы неравноправие различных направлений в пространстве. В силу изотропности пространства мы должны считать, что $a$ может зависеть только от абсолютного значения относительной скорости двух ИСО.

Рассмотрим три ИСО, обозначив их соответственно $K$, $K'$, $K''$, причем $V_1$—скорость $K'$ относительно $K$, а $V_2$—скорость $K''$ относительно $K$. Мы можем написать, что

$$ds^2 = a(V_1)\,ds_1^2, \tag{65.3}$$
$$ds^2 = a(V_2)\,ds_2^2. \tag{65.4}$$

Рассматривая непосредственно системы $K'$ и $K''$, можно записать:

$$ds_1^2 = a(V_{12})\,ds_2^2, \tag{65.5}$$

где $V_{12}$ — модуль скорости системы $K'$ относительно $K''$. Подставляя последнее выражение в формулу (65.3) и сравнивая с формулой (65.4), находим:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{65.6}$$

Поскольку $V_{12}$ зависит не только от модулей векторов $V_1$ и $V_2$, но и от угла между ними (а этот угол вообще не входит в последнее соотношение), очевидно, что удовлетворить соотношению (65.6) можно тогда, когда коэффициент $a$ сводится просто к постоянной величине; постоянная $a$, как это ясно из последнего равенства, может быть равна только единице. Поэтому $ds^2 = ds'^2$. Поскольку в случае распространения светового сигнала из $s_{12} = 0$ следует $s'_{12} = 0$, то из равенства бесконечно малых интервалов вытекает равенство конечных интервалов: $s = s'$. Это значит, что для преобразований координат и времени, согласующихся с постулатами СТО, интервал должен быть инвариантной величиной. Мы увидим, что такими преобразованиями как раз и являются преобразования Лоренца.

Итак, выражение $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ должно оставаться неизменным при переходе от системы $K$ к $K'$. Когда системы $K$ и $K'$ расположены так, как это изображено на рисунке 85, $y = y'$, $z = z'$ и сумма $y^2 + z^2$ уже является инвариантом. Поэтому инвариантом преобразования фактически будет выражение

$$s^2 = c^2t^2 - x^2.$$

## § 66. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Выпишем еще раз прямые и обратные преобразования Лоренца:

$$\left.\begin{array}{ll} x' = \Gamma(x - Vt), & x = \Gamma(x' + Vt'), \\ y' = y, & y = y', \\ z' = z, & z = z', \\ t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), & t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{array}\right| \tag{66.1}$$

Отметим основные следствия, непосредственно вытекающие из этих преобразований.

1. Преобразования Галилея получаются из преобразований Лоренца при следующих условиях: